Schleswig-Holstein
Ministerium für Schule
und Berufsbildung

Beispielaufgaben zu den Fachanforderungen Mathematik

Stand: April 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Leitidee Zahl

L1-1 - Drei Stellen nach dem Komma

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 21: Die Schülerinnen und Schüler wenden einfache zahlentheoretische Kenntnisse an.
Seite 22: Die Schülerinnen und Schüler stellen Zahlen auf verschiedene Weisen situationsgerecht dar und wechseln zwischen diesen Darstellungsformen.
AFB: I und II

Aufgabe L1-1:

a) $0{,}379$ ist ein abbrechender Dezimalbruch mit drei Dezimalen (Stellen nach dem Komma). Gib drei Brüche an, die in der Dezimalbruchschreibweise drei Dezimalen haben.

b) Erläutere, welche Eigenschaft ein Bruch haben muss, damit er auch als Dezimalbruch mit drei Dezimalen geschrieben werden kann.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-1

a) Beispiele: $\frac{1}{8} = 0{,}125$ oder $\frac{379}{1000} = 0{,}379$ oder $\frac{3}{250} = \frac{12}{1000} = 0{,}012$

b) Ein abbrechender Dezimalbruch hat drei Dezimalen, wenn sich der zugehörige gekürzte Bruch auf den Nenner 1000, nicht aber auf den Nenner 100 erweitern lässt.
In diesem Fall darf die Primfaktorzerlegung des Nenners des gekürzten Bruchs nur die Faktoren 2 oder 5 enthalten, einer dieser Faktoren muss genau dreifach vorkommen, keiner der beiden mehr als dreifach.

L1-2 - Unendlich viele Stellen nach dem Komma

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 22: Die Schülerinnen und Schüler stellen Zahlen auf verschiedene Weisen situationsgerecht dar und wechseln zwischen diesen Darstellungsformen.
AFB: I

Aufgabe L1-2:

In Dezimalschreibweise haben $\sqrt{2}$ und $\frac{13}{99}$ beide unendlich viele Stellen nach dem Komma. Erläutere den Unterschied, der sich in der Dezimalschreibweise der beiden Zahlen zeigt.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-2

$\frac{13}{99} = 0{,}\overline{13}$ ist ein periodischer Dezimalbruch. Die beiden Ziffern der Periode wiederholen sich nach dem Komma unendlich oft in der gleichen Weise.

$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ ist eine nichtabbrechende, nichtperiodische Dezimalzahl. Die Ziffern wiederholen sich nach dem Komma nicht in der gleichen Weise.

L1-3 - Zahlenmengen

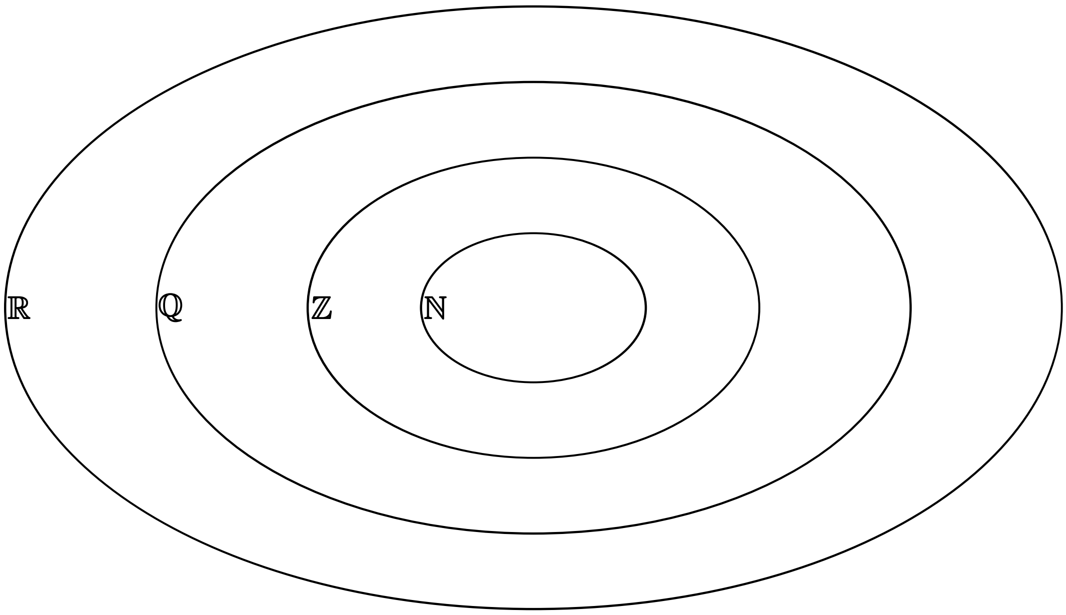
Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 22: Die Schülerinnen und Schüler stellen Zahlen auf verschiedene Weisen situationsgerecht dar und wechseln zwischen diesen Darstellungsformen.
AFB: I und II

Aufgabe L1-3:

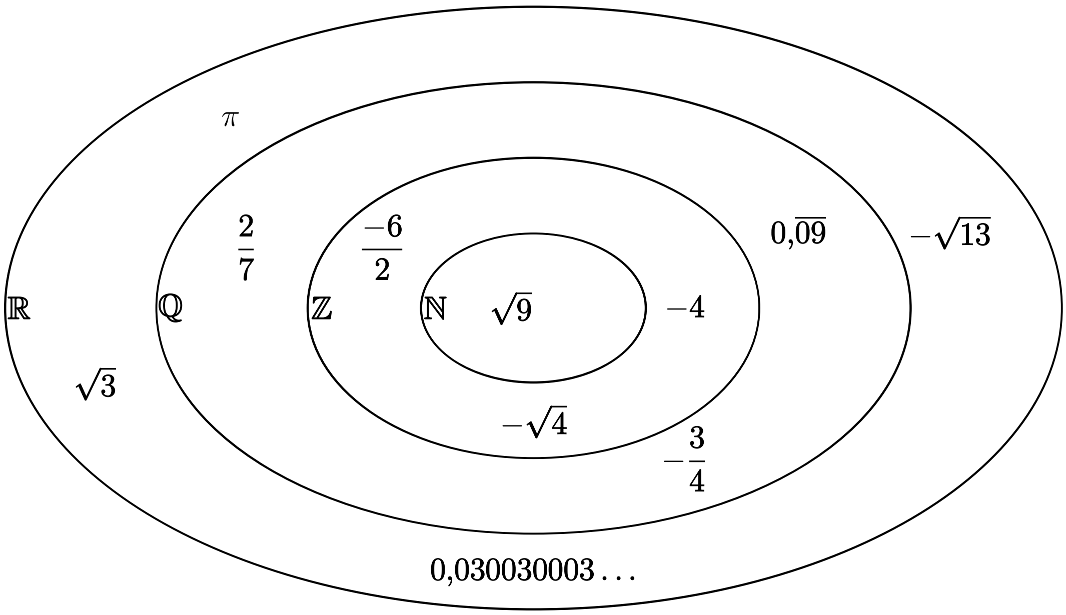
Trage die folgenden Zahlen in das Mengendiagramm ein:

$\pi; \frac{-6}{2}; -4; 0{,}\overline{09}; \sqrt{9}, \sqrt{3}; \frac{2}{7}; -\sqrt{4}; -\frac{3}{4}, -\sqrt{13}$ und

$0{,}03003000300003\ldots$ (die Anzahl der Nullen erhöht sich immer um eine).



Lösung zur Aufgabe Nr. L1-3



L1-4 - $\sqrt{2}$ hat keine letzte Ziffer

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 22: Die Schülerinnen und Schüler stellen Zahlen auf verschiedene Weisen situationsgerecht dar und wechseln zwischen diesen Darstellungsformen.
Seite 22: Die Schülerinnen und Schüler begründen die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen an Beispielen.
AFB: III

Aufgabe L1-4:

$\sqrt{2}$ hat die Eigenschaft $\sqrt{2}^2 = 2$. Begründe: $\sqrt{2}$ kann kein abbrechender Dezimalbruch sein.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-4

Wenn $\sqrt{2}$ ein abbrechender Dezimalbruch wäre, dann müsste es eine letzte Ziffer geben, die nicht null ist. Multipliziert man den abbrechenden Dezimalbruch mit sich selbst, dann ist die Endziffer des Produkts nur von der Endziffer der beiden Faktoren abhängig, diese kann aber nie null sein:
Wäre $\sqrt{2} = \square,\square\square\,1$, dann müsste $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \square,\square\square\square\square\square\,1$ sein.
Wäre $\sqrt{2} = \square,\square\square\,2$, dann müsste $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \square,\square\square\square\square\square\,4$ sein.
($\square$ steht dabei für eine beliebige Ziffer.)

Endziffer des Dezimalbruchs	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Endziffer des Quadrats	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Es wird aber verlangt, dass $\sqrt{2}^2 = 2{,}0000\ldots$ ist. Dies ist nach den eben gennannten Überlegungen nicht möglich, wenn $\sqrt{2}$ ein abbrechender Dezimalbruch ist.

L1-5 - Überschlag

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 23: Die Schülerinnen und Schüler nutzen Überschlagstechniken und Rechenvorteile.
AFB: I

Aufgabe L1-5:

Führe einen Überschlag durch: $1001 + \dfrac{1002}{1003 \cdot 1004} + \dfrac{1005 \cdot 1006}{1007} + 1008^2$.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-5

Eine Überschlagsrechnung liefert:

$$1001 + \frac{1002}{1003 \cdot 1004} + \frac{1005 \cdot 1006}{1007} + 1008^2 \approx 1000 + \tfrac{1}{1000} + 1000 + 1000 \cdot 1000 \approx 1\,000\,000.$$

L1-6 - Tückische Tastpläne

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 23: Die Schülerinnen und Schüler nutzen den Taschenrechner situationsgerecht.
Seite 23: Die Schülerinnen und Schüler berechnen Werte von Termen.
AFB: I

Aufgabe L1-6:

Der Wert des Terms $\frac{12+108}{6}$ soll mit dem Taschenrechner berechnet werden.
Der Taschenrechner hat keine $\frac{\square}{\square}$ -Taste, mit der man Brüche in der üblichen Schreibweise eingeben könnte.

- Wendy tippt $(12+108) \div 6$.
- Ulli tippt $12+108 \div 6$.
- Victor tippt $(12+108 \div 6)$.

Entscheide, wer das richtige Ergebnis erhält.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-6

Nur Wendy bedient den Taschenrechner richtig: $(12+108) \div 6 = \frac{12+108}{6}$.

Weil Ulli die Klammern vergessen hat, beachtet der Taschenrechner "'Punkt- vor Strichrechnung"' und berechnet $12+108 \div 6 = 12 + \frac{108}{6} \neq \frac{12+108}{6}$, also etwas anderes.

Victors Klammern bewirken nichts, er erhält das gleiche Ergebnis wie Ulli.

L1-7 - Testaufgabe für Billig-Taschenrechner

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 23: Die Schülerinnen und Schüler führen Grundrechenarten in den jeweiligen Zahlenbereichen durch.
Seite 23: Die Schülerinnen und Schüler nutzen den Taschenrechner situationsgerecht.
AFB: I

Aufgabe L1-7:

Ganz einfache Taschenrechner gibt es manchmal als Werbegeschenk kostenlos. Tim gibt bei solchen Rechnern meistens die Tastenfolge $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ als Testaufgabe ein.

Ungeeignete Taschenrechner zeigen bei der Testaufgabe als Ergebnis 56 an. Erläutere das Problem.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-7

Der Term $3 + 5 \cdot 7$ darf nicht in der Reihenfolge "'von links nach rechts"' gerechnet werden, sondern es gilt "'Punktrechnung vor Strichrechnung"', also $3 + (5 \cdot 7) = 38$. Billige Taschenrechner berücksichtigen diese Regel nicht. Nach der Eingabe $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{5}$ wird beim Eingeben des nächsten Rechenzeichens $\boxed{\times}$ sofort 8 als Zwischenergebnis berechnet und wie eine eingegebene Zahl behandelt. Der Rechner ermittelt $(3 + 5) \cdot 7$ und gibt 56 anstelle von 38 aus.

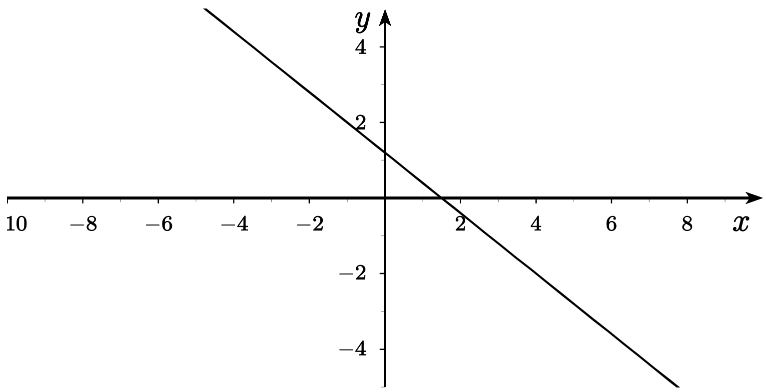
L1-8 - Achsenschnittpunkte

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: I

Aufgabe L1-8:

Stelle die Lösungsmenge der Gleichung $4x + 5y = 6$ graphisch dar.
Gib die Achsenschnittpunkte des Graphen an.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-8



Die x-Achse wird in $(1{,}5 \mid 0)$ geschnitten, die y-Achse in $(0 \mid 1{,}2)$.

L1-9 - Darstellungsformen linearer Gleichungen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: I

Hinweis: Eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten ist bis auf Äquivalenz eindeutig festgelegt durch:

- die Koordinatenform,
- die Lösungsmenge,
- die graphische Darstellung der Lösungsmenge,
- die Funktionsgleichung dieses Graphen,
- zwei Lösungen.

Die Schüler sollten mit diesen Darstellungen vertraut sein.

Aufgabe L1-9:

Zeichne den Graphen, der die Lösungsmenge der linearen Gleichung $ax + by = c$ mit $a = 3, b = 2$ und $c = 4$ wiedergibt.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-9

Gezeichnet wird der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -1{,}5x + 2$.

L1-10 - Definition einer Lösung

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: I

Hinweis: Diese Aufgabe testet das Verständnis für den Begriff "'Lösung"'.

Aufgabe L1-10:

Untersuche, ob $(3; -2)$ eine Lösung der Gleichung $x \cdot (3x - 4y) = y \cdot (10 - 8x) + 13$ ist.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-10

Einsetzen des Zahlenpaares $(3; -2)$ führt zu der falschen Aussage $51 = 41$, das Zahlenpaar ist also keine Lösung der Gleichung.

L1-11 - Lösungen linearer Gleichungen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: I

Aufgabe L1-11:

Eine lineare Gleichung hat die Lösungen $(-6; -1)$ und $(4; 4)$.
Entscheide, welche der folgenden Paare ebenfalls Lösungen der Gleichung sind.

(a) $(2; 2{,}5)$
(b) $(-2; 1)$
(c) $(-5; -0{,}5)$
(d) $(3; 3)$

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-11

Die Zahlenpaare $(-2; 1)$ und $(-5; -0{,}5)$ sind ebenfalls Lösungen der Gleichung. Dies erkennt man daran, dass die Punkte $(-2; 1)$ und $(-5; -0{,}5)$ auf der Geraden durch die Punkte $(-6; -1)$ und $(4; 4)$ liegen. Alternativ kann man die Zahlenpaare in die Gleichung $x - 2y = -4$ einsetzen, die die Lösungen $(-6; -1)$ und $(4; 4)$ hat.

L1-12 - Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: II

Aufgabe L1-12:

Bei den Lösungsmengen von 2x2-Gleichungssystemen unterscheidet man drei prinzipiell unterschiedliche Fälle.
Erläutere diese Aussage anhand des graphischen Lösungsverfahrens.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-12

Die Lösungsmenge jeder der beiden Gleichungen des Systems ist jeweils eine Gerade in der Ebene. Wenn die beiden Geraden echt parallel zueinander sind, gibt es keine Lösungen, also ist die Lösungsmenge leer. Wenn die Geraden nicht parallel zueinander sind, gibt es genau eine Lösung, d.h. die Lösungsmenge enthält genau ein Paar. Wenn die Geraden identisch sind, enthält die Lösungsmenge die Koordinatenpaare aller Punkte der Geraden.

L1-13 - Lineare Gleichungen und Graphen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: II

Aufgabe L1-13:

Gib zwei verschiedene, nicht zueinander äquivalente lineare Gleichungen an, deren Lösungsgraph die x-Achse in $(-3\,|\,0)$ schneidet.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-13

Es sind viele Lösungen und Lösungsansätze möglich. Richtig angegeben ist eine lineare Gleichung dann, wenn sie äquivalent zu einer Gleichung der Form $ax + by = -3a$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ ist, wobei a und b nicht beide gleich null sind.

L1-14 - Äquivalenz von Gleichungen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: II

Hinweis: Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben. Diese Definition der Äquivalenz wird in der Aufgabe thematisiert.

Aufgabe L1-14:

Gib die Gleichungen an, die äquivalent zu $3(x-2)+4=7$ sind.

a) $3=5-2x$
b) $3x-6+12=7$
c) $5x+2=3x+8$
d) $x(3x-1)-3x^2=-3$
e) $x(3x-1)-3x=0$
f) $3x-2=7$
g) $3x-2+4=7$
h) $3(x-2)=11$
i) $(x-3)^2=0$
j) $3(x-2)-3x=-2x$

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-14

Die Ausgangsgleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{3\}$.
Dies gilt ebenfalls für die Gleichungen c), d), f), i) und j), daher sind diese Gleichungen äquivalent zur Ausgangsgleichung.

L1-15 - Veranschaulichung der Lösungsmenge einer linearen Gleichung (1)

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: II

Aufgabe L1-15:

Es gibt eine lineare Gleichung, bei der $(-2;-9),(2;2)$ und $(4;3)$ Lösungen sind.
Beurteile diese Aussage.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-15

Eine solche lineare Gleichung gibt es nicht, denn die zu den Lösungen gehörenden Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

L1-16 - Äquivalenzumformungen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: II

Aufgabe L1-16:

Maria führt folgende Äquivalenzumformungen durch. Dabei hat sie einige Fehler gemacht. Es soll nicht als Fehler gelten, wenn mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet wird.
Finde die Fehler und schreibe die richtige Umformung auf.

$$\begin{array}{lrcl}
 & 5-2(x-1) & = & 3(x-2)^2-3x^2 \\
\Leftrightarrow & 5-2x-2 & = & 3(x-2)^2-3x^2 \\
\Leftrightarrow & 3-2x & = & 3(x^2-4x-4)-3x^2 \\
\Leftrightarrow & 3-2x & = & 3x^2-12x-12-3x^2 \\
\Leftrightarrow & 3-2x & = & -12x-12 \\
\Leftrightarrow & 3 & = & -14x-12 \\
\Leftrightarrow & 15 & = & -14x \\
\Leftrightarrow & x & = & -\frac{15}{14}=-1\frac{1}{14}
\end{array}$$

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-16

$$
\begin{array}{lrcll}
 & 5-2(x-1) & = & 3(x-2)^2-3x^2 & \\
\Leftrightarrow & 5-2x\underline{-}2 & = & 3(x-2)^2-3x^2 & \text{Fehler!} \\
\Leftrightarrow & 3-2x & = & 3(x^2-4x\underline{-}4)-3x^2 & \text{Fehler!} \\
\Leftrightarrow & 3-2x & = & 3x^2-12x-12-3x^2 & \\
\Leftrightarrow & 3-2x & = & -12x-12 & \\
\Leftrightarrow & 3 & = & \underline{-14}x-12 & \text{Fehler!} \\
\Leftrightarrow & 15 & = & -14x & \\
\Leftrightarrow & x & = & -\frac{15}{14}=-1\frac{1}{14} &
\end{array}
$$

Der richtige Version ist:

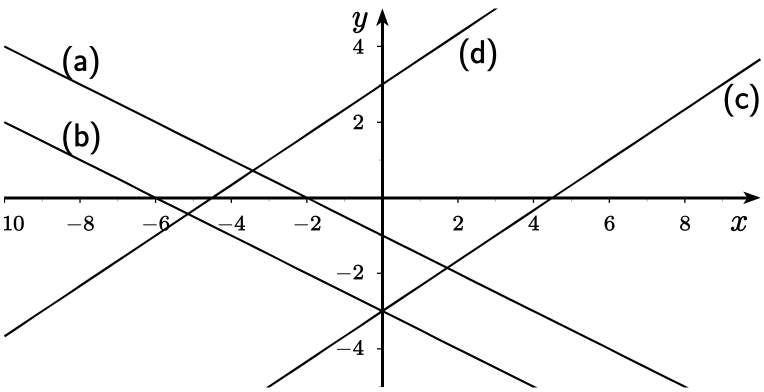
$$
\begin{array}{lrcl}
 & 5-2(x-1) & = & 3(x-2)^2-3x^2 \\
\Leftrightarrow & 5-2x+2 & = & 3(x-2)^2-3x^2 \\
\Leftrightarrow & 7-2x & = & 3(x^2-4x+4)-3x^2 \\
\Leftrightarrow & 7-2x & = & 3x^2-12x+12-3x^2 \\
\Leftrightarrow & 7-2x & = & -12x+12 \\
\Leftrightarrow & 7 & = & -12x+12 \\
\Leftrightarrow & -5 & = & -10x \\
\Leftrightarrow & x & = & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

L1-17 - Veranschaulichung der Lösungsmenge einer linearen Gleichung (2)

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: II

Aufgabe L1-17:

Gib an, welcher der folgenden Graphen die Lösungsmenge der Gleichung $2x - 3y = 9$ beschreibt.



Lösung zur Aufgabe Nr. L1-17

Der gesuchte Graph ist (c).

L1-18 - Koordinatenform linearer Gleichungen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: II

Hinweis: Diese Aufgabe fragt eine Definition ab. Die Identifikation von entsprechenden Zahlen in konkreten Beispielen ist für Schüler oft nicht leicht.

Aufgabe L1-18:

Stelle die zu den Gleichungen äquivalente Koordinatenform $ax + by = c$ auf. Beachte, dass in der Koordinatenform ein "‘+"’ steht.

(a) $2x - 3 = 3y + 4$
(b) $2x = 5$
(c) $2x + y - 6 = 0$
(d) $y = 10$

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-18

(a) $2x + (-3)y = 7$
(b) $2x + 0y = 5$
(c) $2x + 1y = 6$
(d) $0x + 1y = 10$

L1-19 - Graphische Darstellung von Lösungsmengen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge.
AFB: II

Aufgabe L1-19:

Untersuche mit Hilfe einer Skizze, wie viele reelle Lösungen die folgenden Gleichungen haben.

a) $2^x = 5$

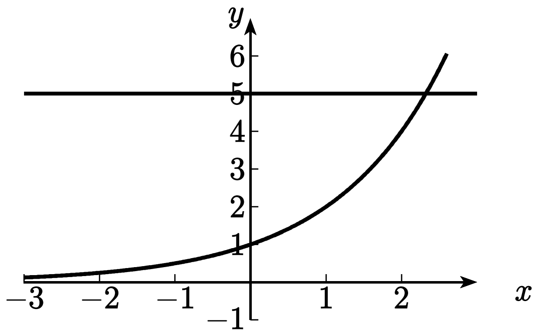
b) $4^x = \sin(x)$

c) $\frac{1}{2}x = \sin(x)$

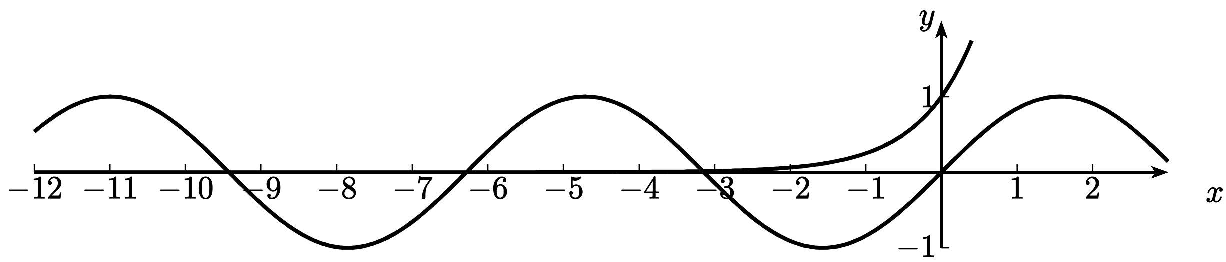
d) $2^{-x} = x^2 - 5$

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-19

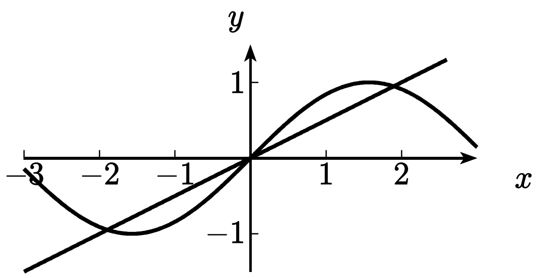
a) Die Gleichung $2^x = 5$ hat genau eine reelle Lösung.



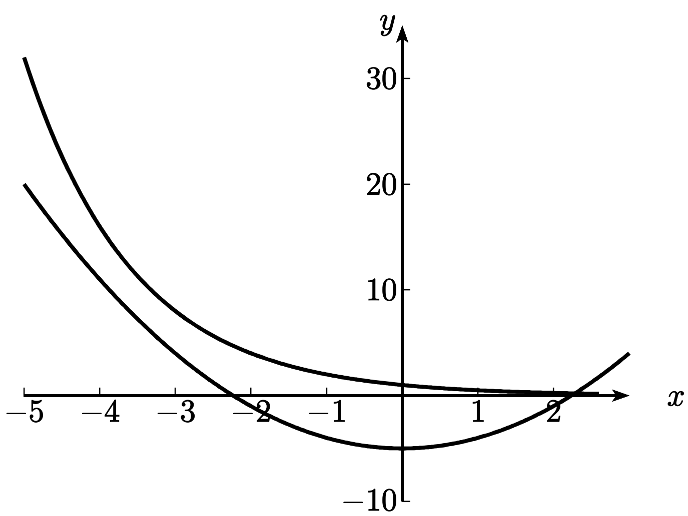
b) Die Gleichung $4^x = \sin(x)$ hat unendlich viele reelle Lösungen.



c) Die Gleichung $\frac{1}{2}x = \sin(x)$ hat drei reelle Lösungen.



d) Die Gleichung $2^{-x} = x^2 - 5$ hat eine reelle Lösung.



L1-20 - Rechengesetze der Potenzrechnung

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 24: Die Schülerinnen und Schüler begründen Rechengesetze für Potenzen und wenden diese an.
AFB: II und III

In dieser Aufgabe geht es nicht um die Kenntnis der genannten Gleichungen, sondern um das systematische Anwenden einer Beweistechnik.

Aufgabe L1-20:

Beweise:

a) Für jede Exponentialfunktion $f: x \to a^x$ $(a \in \mathbb{R}_+)$ gilt $f(x+1) = a \cdot f(x)$.

b) Für jede Exponentialfunktion $f: x \to a^x$ $(a \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N})$ gilt $\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}} = f(-\frac{x}{n})$.

c) Für jede Exponentialfunktion $f: x \to k \cdot a^x$ $(a \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ gilt $k^{n-1} \cdot f(n \cdot x) = (f(x))^n$.

Lösung zur Aufgabe Nr. L1-20

a) $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x = a \cdot f(x)$

b) $\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^x}} = \frac{1}{a^{\frac{x}{n}}} = a^{-\frac{x}{n}} = f(-\frac{x}{n})$

c) $k^{n-1} \cdot f(n \cdot x) = k^{n-1} \cdot k \cdot a^{n \cdot x} = k^n \cdot a^{n \cdot x} = (k \cdot a^x)^n = (f(x))^n$

2 Leitidee Messen

L2-1 - Flächeninhalt eines Feldes

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 25: Die Schülerinnen und Schüler verwenden Größen sachgerecht in Anwendungsbezügen.
Seite 27: Die Schülerinnen und Schüler schätzen, messen, bestimmen und vergleichen Umfänge und Flächeninhalte von ebenen Figuren.
AFB: I

Aufgabe L2-1:

Das Feld von Bauer Huber ist 240 m lang und 90 m breit. Aufgrund der Neuanlegung eines Fahrradweges wird die Länge des Feldes um 4 % und die Breite um 11 % gekürzt.
Die Gemeinde bietet Bauer Huber dafür eine Vergrößerung eines anderen Feldes um 0,4 ha an.

a) Berechne, um wie viel Prozent das Feld kleiner geworden ist.

b) Gib an, um wie viel ha sich der Flächeninhalt der Felder von Bauer Huber dadurch verändert.

Lösung zur Aufgabe Nr. L2-1

a)

$$\begin{aligned} A_{alt} &= 240\,m \cdot 90\,m = 21600\,m^2 \\ A_{neu} &= 240\,m \cdot 0{,}96 \cdot 90\,m \cdot 0{,}89 \approx 18455\,m^2 \\ A_{weg} &\approx 3145\,m^2 \\ \frac{A_{weg}}{A_{alt}} &\approx 0{,}1456 = 14{,}56\,\% \end{aligned}$$

Das Feld ist um 14,56 % kleiner geworden.

b)

$$\begin{aligned} 3145\,m^2 &= 0{,}3145\,ha \\ 0{,}4\,ha - 0{,}3145\,ha &= 0{,}0855\,ha \end{aligned}$$

Bauer Huber hat durch diese Veränderung ca. 0,09 ha mehr.

L2-2 - Dreieckskonstruktion, Bestimmung fehlender Größen des Dreiecks

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 26: Die Schülerinnen und Schüler nutzen das Koordinatensystem zur Darstellung von ebenen Figuren.
Seite 28: Die Schülerinnen und Schüler bestimmen oder berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen in ebenen Figuren und in Körpern.
Seite 28: Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Streckenlängen im rechtwinkligen Dreieck.
AFB: I(a) und II(b)

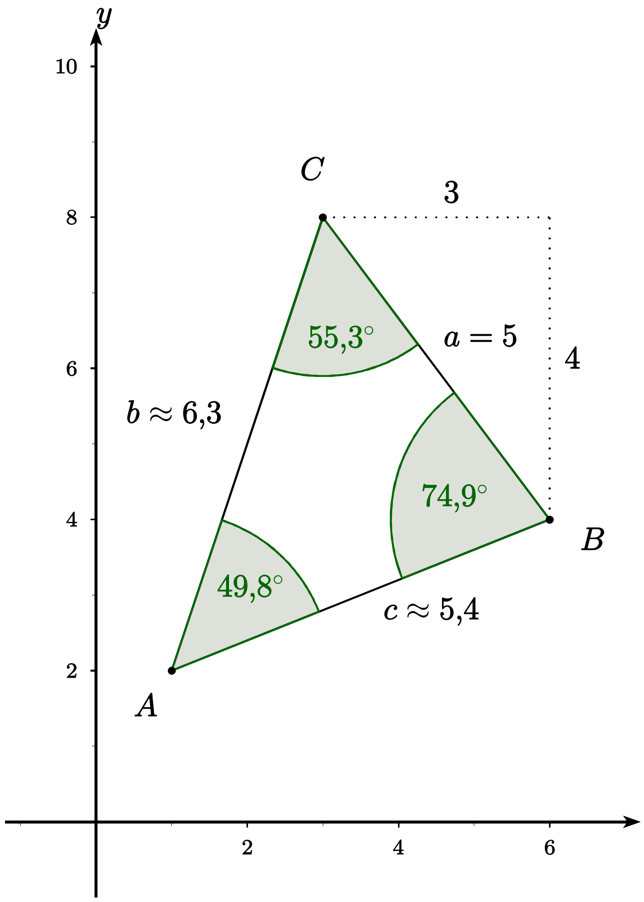
Aufgabe L2-2:

Die Eckpunkte eines Dreiecks im Koordinatensystem haben die Koordinaten $A(1\,|\,2)$, $B(6\,|\,4)$ und $C(3\,|\,8)$.

a) Zeichne das Dreieck und miss die Größen aller Seitenlängen und Winkel.

b) Berechne a und α aus den gegebenen Koordinaten.

Lösung zur Aufgabe Nr. L2-2



Die Länge a berechnet sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

$a = \sqrt{(6-3)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$

Entsprechend erhält man für die Längen b und c:

$b = \sqrt{40} \approx 6{,}32\,;\ c = \sqrt{29} \approx 5{,}39.$

Mit Hilfe des Cosinussatzes erhält man für den Winkel α :

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \approx 0{,}646 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 49{,}8^\circ.$$

L2-3 - Rohrkrepierer

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 27: Die Schülerinnen und Schüler schätzen, messen, bestimmen und vergleichen Umfänge und Flächeninhalte von ebenen Figuren.
AFB: II

Aufgabe L2-3:

KIELER CHRONIK

Rohrkrepierer

Der Kollege von Kielius war gestern einfach nicht wiederzuerkennen. Richtig niedergeschlagen, getroffen und beschämt sah er aus. Vor ihm auf seinem Schreibtisch lag ein ganzer Stapel ausgedruckter E-Mails und Faxe - alle wegen eines Artikels! Erst war Kielius sogar ein bisschen neidisch, dass der Kollege so viel Resonanz bekommen hatte, doch dann las er den Inhalt und wusste, warum dieser so geknickt aussah. In einigen Zuschriften gingen die Leser nicht gerade freundlich mit ihm um: Ob er denn nicht rechnen könne, brummte ihn da einer an; ein anderer bescheinigte ihm hämisch, dass er beim PISA-Test glatt durchgefallen wäre. Tatsächlich war dem Kollegen doch glatt ein dicker Denkfehler unterlaufen: Eins und eins sind nach Adam Riese zwar zwei, aber zwei Wasserrohre mit einem Durchmesser von 60 bzw. 40 Zentimetern sind insgesamt nicht so groß wie eines mit einem Durchmesser von einem Meter. Das hatte er fälschlicherweise geschrieben und damit einen echten Rohrkrepierer erzeugt. Die meisten Leser reagierten auf den Fehler jedoch sachlich-freundlich und gaben gern Nachhilfe-Unterricht. Auch Kielius frischte dadurch gleich seine nur noch vagen Schulkenntnisse auf. Plötzlich tauchte die Kreisflächenformel Pi (3,1426) mal r (Radius) Quadrat wie ein alter Bekannter auf, und die mathematische Neugier war geweckt. Danach erreichen die beiden Rohre zusammen einen Querschnitt von gerade 52 Prozent des Ein-Meter-Rohres. Seit er das weiß, gibt Kielius' Kollege mathematisch nun volles Rohr: Er rechnet, um den Durchmesser herauszubekommen, den ein drittes Rohr haben müsste, mit dem sich die Differenz ausgleichen ließe - eine wunderbare Aufgabe für die nächste PISA-Studie.

Kielius

Quelle: Kieler Nachrichten vom 1.10.2002

Überprüfe die Angaben des Textes und löse die von Kielius formulierte Aufgabe!

Lösung zur Aufgabe Nr. L2-3

Zu überprüfen ist die Behauptung "'[...] zwei Wasserrohre mit einem Durchmesser von 60 bzw. 40 Zentimetern sind insgesamt nicht so groß wie eines mit einem Durchmesser von einem Meter."'
Gemeint ist, dass die beiden kleineren Rohre R_1 und R_2 zusammen eine kleinere Querschnittsfläche haben als das große Rohr R_3.
Diese Aussage ist korrekt, wie die folgende Rechnung zeigt:

$A_1 + A_2 = \pi \cdot (0{,}3\text{m})^2 + \pi \cdot (0{,}2\text{m})^2 \approx 0{,}4084\text{m}^2$
$A_3 = \pi \cdot (0{,}5\text{m})^2 \approx 0{,}7854\text{m}^2$.

Ferner ist π eine irrationale Zahl, d. h., die Angabe $\pi = 3{,}1416$ ist nicht korrekt, auch wenn sie in diesem Falle natürlich hinreichend genau ist.

Die Überprüfung der Prozentangabe ergibt tatsächlich exakt 52 Prozent, wenn man nicht rundet.
Mit gerundeten Werten ergibt sich
$\frac{0{,}4084}{0{,}7854} \approx 0{,}5199 \approx 52\,\%$.

Welchen Durchmesser d muss nun ein drittes Rohr haben, damit "'die Differenz"'
$0{,}7854\text{m}^2 - 0{,}4084\text{m}^2 = 0{,}377\text{m}^2$ "'ausgeglichen"' wird?
Dazu ergibt die Gleichung $\pi r^2 = 0{,}377\text{m}^2$ einen Durchmesser d von gerundet 0,6928 m.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass bis auf die ungenaue Angabe von π korrekt gerechnet und gerundet wurde.

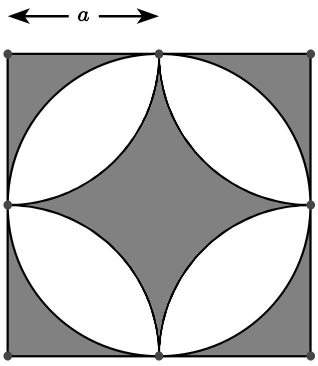
L2-4 - Flächeninhalt von Kreissegmenten

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 27: Die Schülerinnen und Schüler schätzen, messen, bestimmen und vergleichen Umfänge und Flächeninhalte von ebenen Figuren.
AFB: II

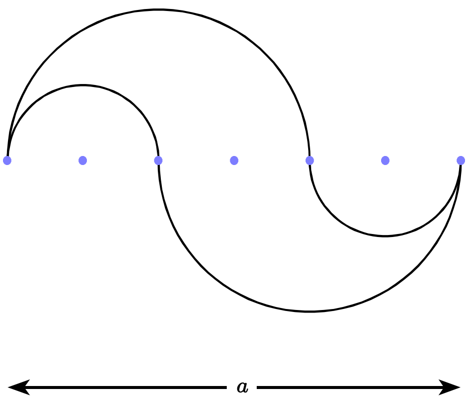
Aufgabe L2-4:

a) Berechne den Flächeninhalt der grauen Fläche für $a = 2\,\text{cm}$.

b) Bestimme a so, dass die graue Fläche $10\,\text{cm}^2$ groß ist.



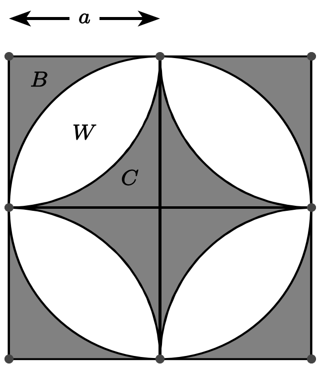
c) Berechne den Flächeninhalt der Figur für $a = 6\,\text{cm}$.



Lösung zur Aufgabe Nr. L2-4

a)

$$
\begin{aligned}
A_{\text{Quadrat}} &= (2a)^2 = 4a^2 &&= 16\,\text{cm}^2 \\
A_B = A_C &= a^2 - \tfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot a^2 &&\approx 0{,}86\,\text{cm}^2 \\
A_W &= a^2 - A_B - A_C &&\approx 2{,}28\,\text{cm}^2 \\
A_{\text{grau}} &= (2a)^2 - 4\cdot A_W &&\approx 6{,}88\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$



b)

$$
\begin{aligned}
A_{\text{grau}} &= 4a^2 - 4\,(a^2 - 2A_B) \\
&= 4\,a^2 - 4\,(a^2 - 2\,(a^2 - \frac{1}{4}\,\pi\,a^2)) \\
&= 4\,a^2 - 4\,(a^2 - 2\,a^2 + \frac{1}{2}\,\pi\,a^2) \\
&= 4\,a^2 - 4\,(-a^2 + \frac{1}{2}\,\pi\,a^2) \\
&= 4\,a^2 + 4\,a^2 - 2\,\pi\,a^2 \\
&= 8\,a^2 - 2\,\pi\,a^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10\,\text{cm}^2 &= 8\,a^2 - 2\,\pi\,a^2 \\
a &\approx 2{,}41\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
A &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{a}{3})^2\cdot\pi - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{a}{6})^2\cdot\pi \\
&= \frac{1}{12}\cdot\pi\cdot a^2 \\
A &= 3\,\pi\,\text{cm}^2 \approx 9{,}42\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

L2-5 - Flächeninhalte besonderer Vierecke

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 27: Die Schülerinnen und Schüler schätzen, messen, bestimmen und vergleichen Umfänge und Flächeninhalte von ebenen Figuren.
AFB: I und II

Hinweis: Es geht hier nicht darum, dass ein Schüler die Formel $A = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$ auswendig angeben kann, sondern darum, dass er in der gegebenen Situation die Anwendbarkeit dieser Formel beurteilen kann.

Aufgabe L2-5:

Es ist $ABCD$ ein Viereck mit den Seitenlängen a,b,c,d und den Diagonalenlängen e und f (Standardbezeichnung).

Entscheide, ob sich der Flächeninhalt eines Vierecks mit der jeweiligen Formel berechnen lässt, wenn es sich um ein besonderes Viereck handelt. Wenn das der Fall ist, setze in der Tabelle an der entsprechenden Stelle ein Kreuz.

$ABCD$ ist ein	$A = a \cdot b$	$A = \frac{e \cdot f}{2}$	$A = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$
Rechteck			
Raute			
Parallelogramm			
achsensymm. Trapez			
Quadrat			
achsensymm. Drachen			

Lösung zur Aufgabe Nr. L2-5

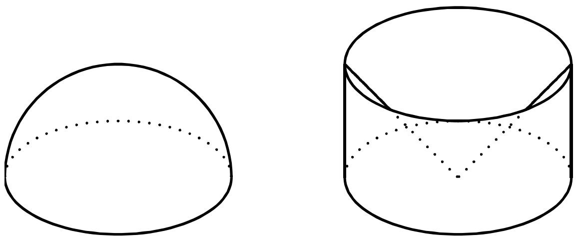
$ABCD$ ist ein	$A = a \cdot b$	$A = \frac{e \cdot f}{2}$	$A = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$
Rechteck	x		x
Raute		x	x
Parallelogramm			x
achsensymm. Trapez			
Quadrat	x	x	x
achsensymm. Drachen		x	

L2-6 - Volumina und Oberflächeninhalte

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 27: Die Schülerinnen und Schüler schätzen, messen, bestimmen und vergleichen Oberflächeninhalte und Volumina von Körpern.
AFB: II(a) und III(b)

Aufgabe L2-6:

Gegeben ist eine Halbkugel K_1 mit Radius r und ein Körper K_2. Der Körper K_2 ist dadurch entstanden, dass aus einem Zylinder der Höhe r mit Grundkreisradius r ein Kegel der Höhe r herausgefräst wurde (siehe Abbildung).



a) Zeige, dass die beiden Körper gleiche Volumina besitzen.

b) Berechne, um wie viel Prozent die Oberfläche von K_2 größer ist als die von K_1.

Lösung zur Aufgabe Nr. L2-6

a) Das Volumen von K_1 beträgt $\frac{2}{3}\pi r^3$.
Das Volumen von K_2 beträgt $\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3$.

b) Die Oberfläche von K_1 beträgt $O_1 = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$.
Die Oberfläche von K_2 beträgt $O_2 = \pi r^2 + 2\pi r \cdot r + \pi r\sqrt{2} \cdot r = (3+\sqrt{2})\pi r^2$.

Damit ergibt sich für das Verhältnis von O_2 zu O_1:

$$\frac{O_2}{O_1} = \frac{(3+\sqrt{2})\pi r^2}{3\pi r^2} \approx 1{,}471$$

Damit ist O_2 etwa 47,1 % größer als O_1.

L2-7 - Volumenberechnung einer Dose

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 27: Die Schülerinnen und Schüler schätzen, messen, bestimmen und vergleichen Oberflächeninhalte und Volumina von Körpern.
AFB: II

Aufgabe L2-7:

Die Oberfläche einer 12 cm hohen, zylindrischen Dose beträgt 230 cm^2. Berechne den Radius der Grundfläche und das Volumen der Dose in l.

Lösung zur Aufgabe Nr. L2-7

$$\begin{aligned} O &= 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot h \\ 230 &= 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot 12 \\ 230 &= 2\cdot\pi\cdot(r^2 + 12\cdot r) \\ 0 &= r^2 + 12\,r - \frac{230}{2\,\pi} \end{aligned}$$

$$r = -6 + \sqrt{36 + \frac{230}{2\,\pi}} \;\vee\; r = -6 - \sqrt{36 + \frac{230}{2\,\pi}}$$

$r \approx 2{,}52$ oder $r \approx -14{,}52$

Der Radius beträgt ca. 2,5 cm.

$V = \pi\cdot r^2\cdot h \approx \pi\cdot 2{,}5^2\cdot 12 \approx 236$

Das Volumen beträgt ca. 240 ml = 0,24 l.

L2-8 - Volumen- und Oberflächenberechnung einer Pyramide

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 27: Die Schülerinnen und Schüler schätzen, messen, bestimmen und vergleichen Oberflächeninhalte und Volumina von Körpern.
Seite 28: Die Schülerinnen und Schüler bestimmen oder berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen in ebenen Figuren und in Körpern.
AFB: I

Aufgabe L2-8:

Bei einer quadratischen Pyramide, deren 4 Seitenflächen zueinander kongruente gleichschenklige Dreiecke sind, beträgt die Länge der Grundseite 70 m und die Höhe 60 m.
Berechne das Volumen und die Oberfläche dieser Pyramide.

Lösung zur Aufgabe Nr. L2-8

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \\
&= \frac{1}{3} \cdot 70^2 \cdot 60 \\
&= 98\,000
\end{aligned}
$$

Das Volumen der Pyramide beträgt 98 000 m^3.

Für die Höhe einer Seitendreiecksfläche gilt

$$
\begin{aligned}
h_s^2 &= (\frac{1}{2}\, g)^2 + h^2 \\
&= 35^2 + 60^2 \\
h_s &= \sqrt{4825} \approx 69{,}46.
\end{aligned}
$$

Für den Flächeninhalt eines Seitendreiecks gilt damit

$$
\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot h \\
&= \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot \sqrt{4825} \\
&\approx 2431{,}18.
\end{aligned}
$$

Für die Oberfläche der Pyramide folgt damit

$$
\begin{aligned}
O &= G + 4 \cdot A \\
&= 70^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot \sqrt{4825} \\
&\approx 14\,624{,}71.
\end{aligned}
$$

Die Oberfläche beträgt ca. 14 624,71 m^2.

L2-9 - Vermessungsaufgabe, trigonometrische Sätze

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 26: Die Schülerinnen und Schüler ermitteln Streckenlängen und Winkelgrößen mithilfe von Konstruktionen oder geometrischen Sätzen in ebenen Figuren und in Körpern.
Seite 28: Die Schülerinnen und Schüler bestimmen oder berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen in ebenen Figuren und in Körpern.
Seite 30: Die Schülerinnen und Schüler führen geometrische Konstruktionen mit dem dynamischen Geometriesystem aus.
AFB: III

Hinweis: Diese Aufgabe zeigt einen auch im Unterricht häufig möglichen Dreischritt:

1. Die geometrische Situation wird in eine maßstäbliche Konstruktion umgesetzt. Hierbei wird auch deutlich, welche Größen durch andere, vorgegebene Größen festgelegt sind, was für die spätere Berechnung (Finden eines Lösungsweges) wichtig ist.

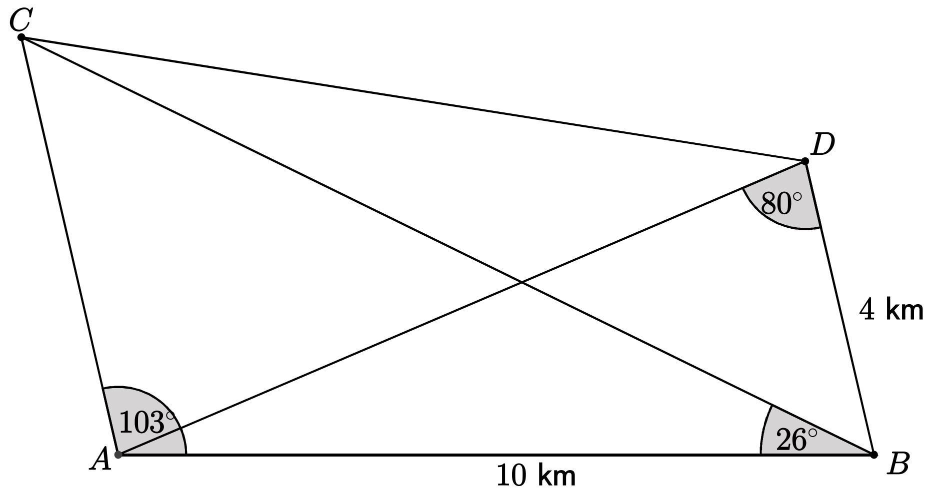
2. Die gesuchten Größen werden durch Messung bestimmt. Durch Konstruktion mit einem DGS werden präzisere Ergebnisse erzielt.

3. Die gesuchten Größen werden durch Berechnung bestimmt.

Die Konstruktion ist für die Schüler auch deshalb schwierig, weil wegen der Ssw-Konstruktion des Dreiecks ABD nicht mit der Standlinie begonnen werden kann. (Es sei denn, man ersetzt die Ssw-Konstruktion durch eine Konstruktion, bei der der Kreisbogen über der Standlinie konstruiert wird, von dem aus diese unter einem Winkel von 80° erscheint. Dazu braucht man dann aber die Kenntnis des Umfangswinkelsatzes.)

Aufgabe L2-9:

Die Länge einer unzugänglichen Strecke $\overline{CD}$ soll bestimmt werden.
Der Punkt C erscheint gegenüber einer 10 km langen Standlinie $\overline{AB}$ unter den Winkeln 103° und 26°.
Der Punkt D ist 4 km von B entfernt, von D aus erscheint die Standlinie unter einem Winkel von 80°.



a) Bestimme die Länge der Strecke $\overline{CD}$ durch Konstruktion und Messung.

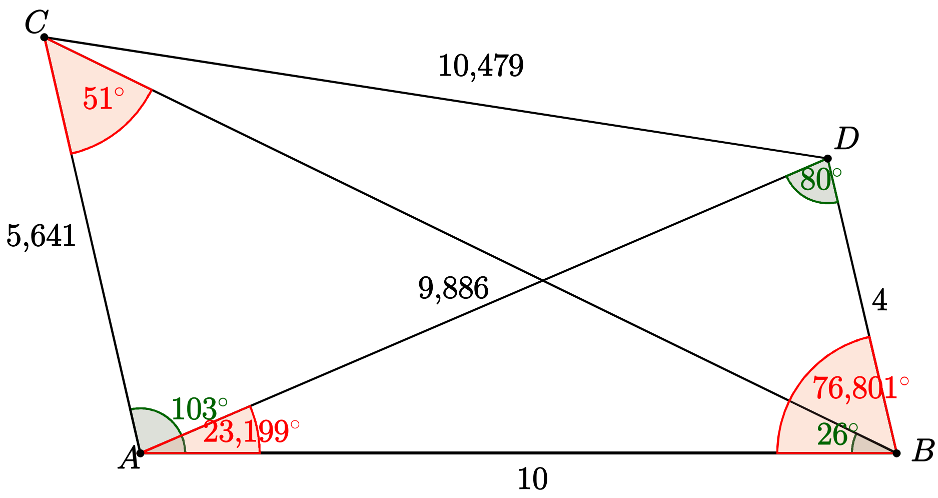
b) Konstruiere mit Hilfe eines DGS und miss die gesuchte Länge auf drei Dezimalen genau mit Hilfe des Programms.

c) Berechne die Länge der Strecke $\overline{CD}$ aus den im Text oben gegebenen Daten.

Lösung zur Aufgabe Nr. L2-9

Das Dreieck $\triangle ABD$ kann bis auf Kongruenz eindeutig über eine Ssw-Konstruktion konstruiert werden, da die Länge der Strecke $\overline{AB}$ größer als die der Strecke $\overline{BD}$ ist ($10\,km > 4\,km$). Damit ist die Lage des Punktes D ermittelt.
Es kann dabei nicht mit der Standlinie begonnen werden.
Das Dreieck $\triangle ABC$ kann bis auf Kongruenz eindeutig über eine wsw-Konstruktion konstruiert werden. Damit ist die Lage des Punktes C ermittelt. Die Streckenlänge ergibt sich je nach Genauigkeit der Zeichnung zu etwa 10,5 (km).

Konstruktion mit Hilfe eines DGS:



Berechnung:
Der Winkel $\sphericalangle BAD$ wird über den Sinussatz im Dreieck $\triangle ABD$ berechnet.

$$\sin(\sphericalangle BAD) = \frac{\sin(80^\circ)\cdot 4}{10} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BAD \approx 23{,}2^\circ.$$

Damit gilt für die Winkel
$\sphericalangle DBA \approx 180^\circ - 23{,}2^\circ - 80^\circ = 76{,}8^\circ$,
$\sphericalangle DAC \approx 103^\circ - 23{,}2^\circ = 79{,}8^\circ$,
$\sphericalangle ACB = 180^\circ - 103^\circ - 26^\circ = 51^\circ$.

Die Länge der Strecke $\overline{AD}$ ergibt sich über den Cosinussatz im Dreieck $\triangle ABD$ zu
$|\overline{AD}| = \sqrt{10^2 + 4^2 - 2\cdot 10\cdot 4\cdot\cos(76{,}8^\circ)} \approx 9{,}886$.

Die Länge der Strecke $\overline{AC}$ ergibt sich mit dem Sinussatz im Dreieck $\triangle ABC$ zu

$$|\overline{AC}| = \frac{10\cdot\sin(26^\circ)}{\sin(51^\circ)} \approx 5{,}641.$$

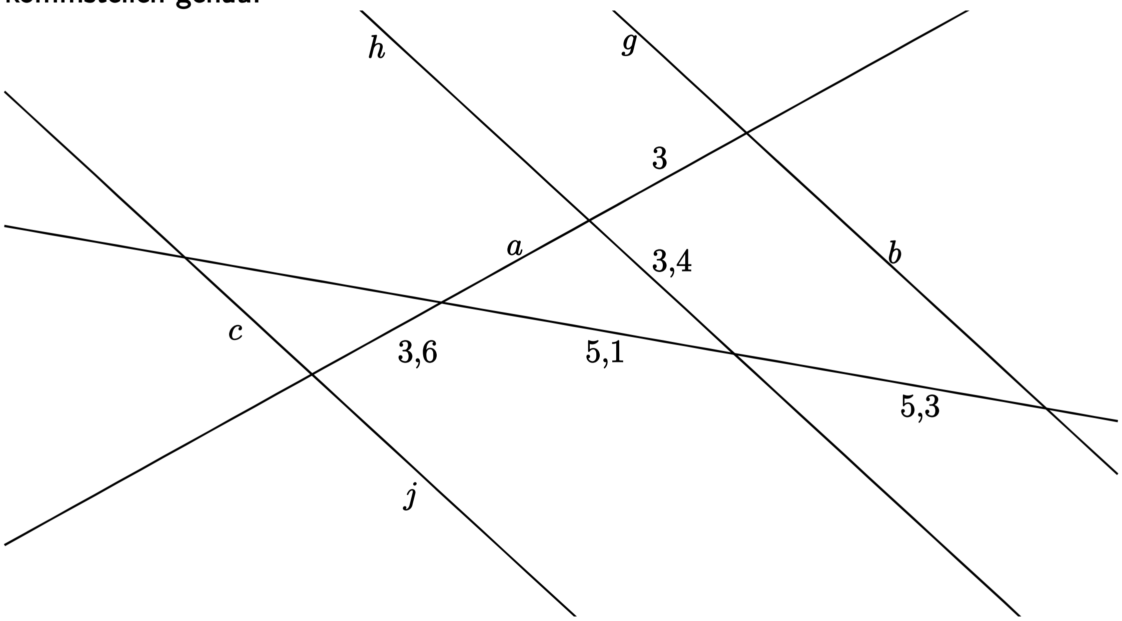
Nun lässt sich die gesuchte Streckenlänge mit dem Cosinussatz im Dreieck $\triangle ADC$ berechnen:
$|\overline{CD}| \approx \sqrt{9{,}886^2 + 5{,}641^2 - 2\cdot 9{,}886\cdot 5{,}641\cdot\cos(79{,}8^\circ)} \approx 10{,}479$
Damit beträgt die gesuchte Streckenlänge etwa 10,479 km.

L2-10 - Berechnungen mit Hilfe der Strahlensätze

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 28: Die Schülerinnen und Schüler bestimmen oder berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen in ebenen Figuren und in Körpern.
AFB: II

Aufgabe L2-10:

In der folgenden, nicht maßstabsgetreuen Skizze sind die Geraden g,h und j parallel zueinander. Die Zahlen geben die Längen von Teilabschnitten in Zentimetern an.
Berechne die Längen der unbekannten Teilabschnitte a,b und c in Zentimetern auf zwei Nachkommstellen genau.



Lösung zur Aufgabe Nr. L2-10

$$\frac{a}{5{,}1} = \frac{3}{5{,}3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3 \cdot 5{,}1}{5{,}3} \approx 2{,}89$$
$$\frac{b}{10{,}4} = \frac{3{,}4}{5{,}1} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3{,}4 \cdot 10{,}4}{5{,}1} \approx 6{,}93$$
$$\frac{c}{3{,}6} = \frac{3{,}4}{2{,}89} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3{,}6 \cdot 3{,}4}{2{,}89} \approx 4{,}24$$

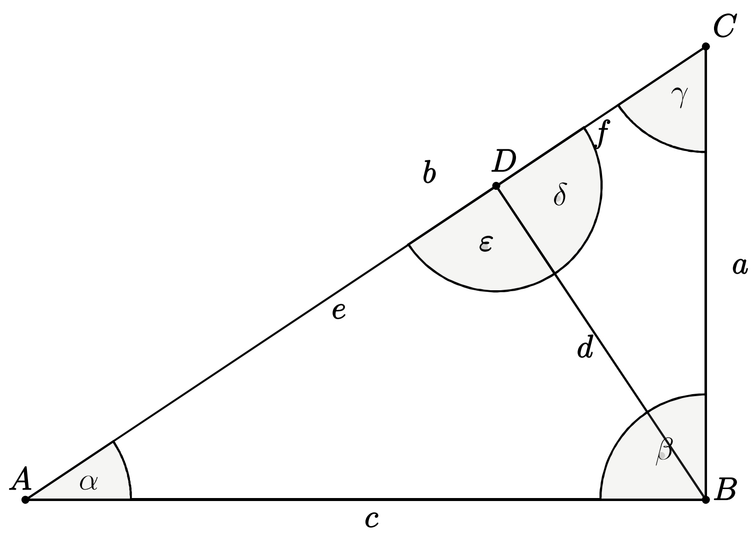
Die unbekannten Längen sind also $a \approx 2{,}89$ cm, $b \approx 6{,}93$ cm und $c \approx 4{,}24$ cm.

L2-11 - Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 28: Die Schülerinnen und Schüler bestimmen oder berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen in ebenen Figuren und in Körpern.
Seite 28: Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Streckenlängen im rechtwinkligen Dreieck.
AFB: II

Aufgabe L2-11:

In der folgenden Figur sind $\beta = 90^\circ$ und $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.



Kreuze die wahren Aussagen an.

- ☐ $\cos(\beta) = 1$
- ☐ $\sin(\beta) = 1$
- ☐ $a^2 + b^2 = c^2$
- ☐ $\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \dfrac{a}{c}$
- ☐ $d = \cos(\alpha) \cdot c$
- ☐ Die Dreiecke $\triangle BDA$ und $\triangle CDB$ sind ähnlich zueinander.
- ☐ $d^2 + e^2 = c^2$

Lösung zur Aufgabe Nr. L2-11

- ☐ $\cos(\beta) = 1$ $falsch$
- ☐ $\sin(\beta) = 1$ $wahr$
- ☐ $a^2 + b^2 = c^2$ $falsch$
- ☐ $\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \dfrac{a}{c}$ $wahr$
- ☐ $d = \cos(\alpha) \cdot c$ $falsch$
- ☐ Die Dreiecke $\triangle BDA$ und $\triangle CDB$ sind ähnlich zueinander. $wahr$
- ☐ $d^2 + e^2 = c^2$ $wahr$

3 Leitidee Raum und Form

L3-1 - Ssw-Konstruktion

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 30: Die Schülerinnen und Schüler konstruieren Dreiecke aus vorgegebenen Angaben.
AFB: II und III

Aufgabe L3-1:

a) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $c = 7$ cm, $b = 6$ cm und $\gamma = 50^\circ$ und miss die Größen der fehlenden Stücke.

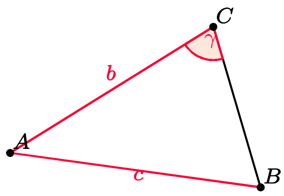
b) Gib eine jeweils eine mögliche Länge der Seite c an, so dass bei dieser Aufgabe

- kein Lösungsdreieck entsteht,
- zwei nicht kongruente Lösungsdreiecke entstehen.

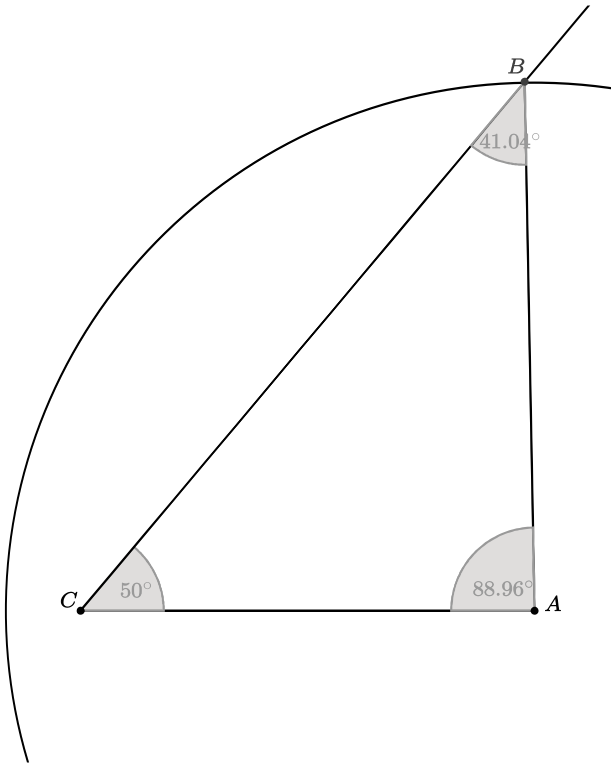
Verdeutliche Deine Lösung jeweils durch eine Skizze.

Lösung zur Aufgabe Nr. L3-1

a) Planfigur:

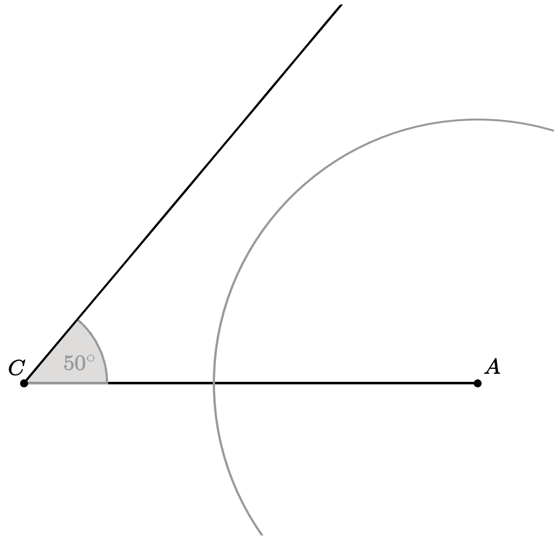


Zeichnung:

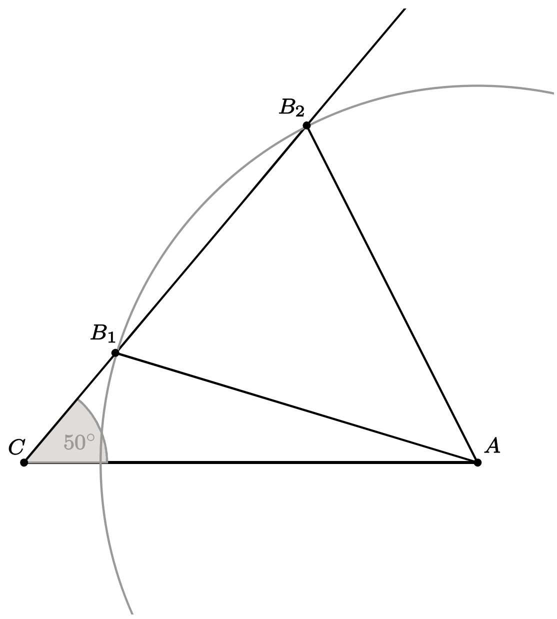


gemessen:
$a \approx 9{,}1$ cm
$\alpha \approx 89^\circ$
$\beta \approx 41^\circ$.

b) Hier können die Schüler für die Seite c Längenangaben kleiner als 4,596 cm angeben. (Genauer: $0 < c < 6$ cm $\cdot \sin(50°) \approx 4{,}596$ cm, der exakte Wert muss nicht unbedingt berechnet werden, eine Ermittlung durch Messen reicht aus.)
In diesem Fall würde der Kreis um den Punkt A mit dem Radius der Länge der Seite c nicht den freien Schenkel des Winkels γ schneiden, so dass kein Dreieck entstehen kann.



Hier können die Schüler für die Seite c Längenangaben größer als 4,6 cm und kleiner als 6 cm angeben.
(Genauer 6 cm $\cdot \sin(50°) < 4{,}6$ cm $< c < 6$ cm.)
In diesem Fall würde der Kreis um den Punkt A mit dem Radius der Länge der Seite c den freien Schenkel des Winkels γ zweimal schneiden, so dass es zwei Schnittpunkte B_1 und B_2 gibt und zwei nicht kongruente Dreiecke entstehen können.



L3-2 - Eigenschaften besonderer Vierecke (1)

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 29: Die Schülerinnen und Schüler benennen, zeichnen und charakterisieren Figuren aus dem "'Haus der Vierecke"' und unterscheiden definierende und abgeleitete Eigenschaften.
AFB: I

Aufgabe L3-2:

Gib an, ob die folgenden Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind.

Jede Raute ist auch ein Parallelogramm.	
Jedes Parallelogramm ist auch eine Raute.	
Ein Rechteck mit orthogonalen Diagonalen ist ein Quadrat.	
Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel ist ein Quadrat.	
Ein Viereck mit 2 Symmetrieachsen ist immer ein Rechteck.	
Jedes Parallelogramm ist auch ein Trapez.	
Jedes Viereck mit zueinander orthogonalen Diagonalen ist ein Drachen.	

Lösung zur Aufgabe Nr. L3-2

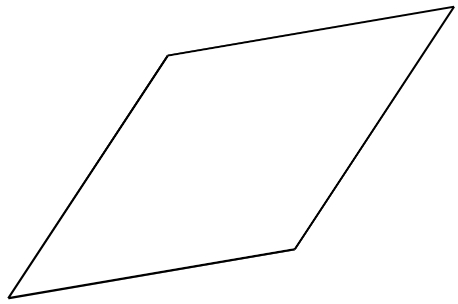
Jede Raute ist auch ein Parallelogramm.	w
Jedes Parallelogramm ist auch eine Raute.	f
Ein Rechteck mit orthogonalen Diagonalen ist ein Quadrat.	w
Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel ist ein Quadrat.	f
Ein Viereck mit 2 Symmetrieachsen ist immer ein Rechteck.	f
Jedes Parallelogramm ist auch ein Trapez.	w
Jedes Viereck mit zueinander orthogonalen Diagonalen ist ein Drachen.	f

L3-3 - Eigenschaften besonderer Vierecke (2)

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 29: Die Schülerinnen und Schüler benennen, zeichnen und charakterisieren Figuren aus dem "'Haus der Vierecke"' und unterscheiden definierende und abgeleitete Eigenschaften.
AFB: II

Aufgabe L3-3:

Peter, Maria, Leif und Monika betrachten das abgebildete Viereck:



- Maria sagt: "'Das ist eine Raute."'
- Leif sagt: "'Das ist ein Quadrat."'
- Peter meint: "'Das ist ein Parallelogramm."'
- Monika sagt: "'Das ist ein achsensymmetrisches Trapez."'

Wer hat Recht? Begründe Deine Meinung genau.

Lösung zur Aufgabe Nr. L3-3

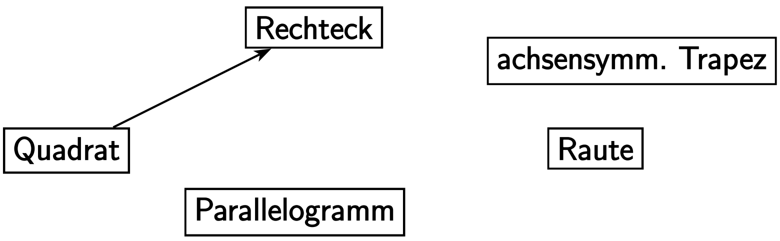
Maria hat Recht. Das Viereck hat vier gleich lange Seiten und ist damit in jedem Fall eine Raute.
Dann hat auch Peter Recht, da jede Raute ein besonderes Parallelogramm ist.
Leifs Aussage ist nicht richtig, das Viereck hat keine rechten Innenwinkel.
Auch Monikas Aussage stimmt nicht, da keine Achsensymmetrie zu einer Mittelsenkrechten einer Seite vorliegt.

L3-4 - Eigenschaften besonderer Vierecke (3)

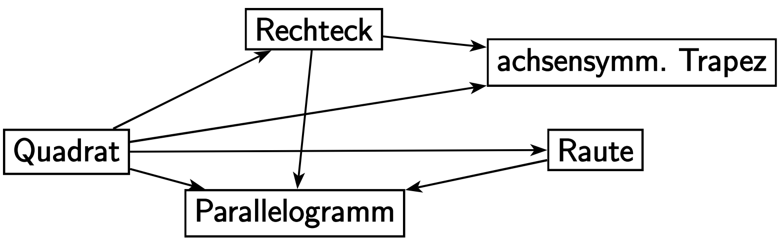
Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 29: Die Schülerinnen und Schüler benennen, zeichnen und charakterisieren Figuren aus dem "'Haus der Vierecke"' und unterscheiden definierende und abgeleitete Eigenschaften.
AFB: II

Aufgabe L3-4:

Der Pfeil besagt: Ein Quadrat ist ein besonderes Rechteck, weil es auch alle Eigenschaften eines Rechtecks besitzt. Ergänze weitere Pfeile mit einer entsprechenden Bedeutung.



Lösung zur Aufgabe Nr. L3-4



L3-5 - Achsensymmetrisches Trapez

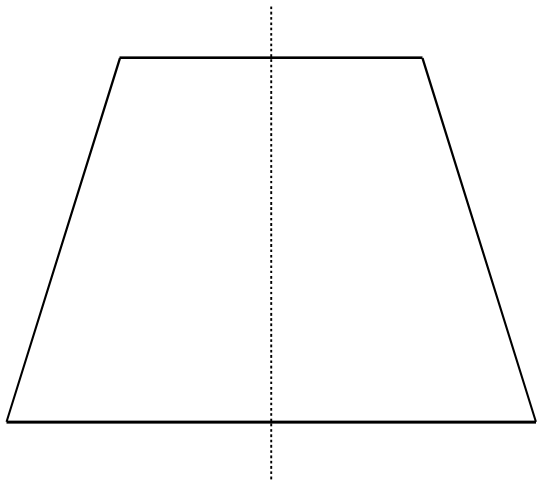
Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 29: Die Schülerinnen und Schüler benennen, zeichnen und charakterisieren Figuren aus dem "'Haus der Vierecke"' und unterscheiden definierende und abgeleitete Eigenschaften.
AFB: II

Aufgabe L3-5:

Zeichne ein achsensymmetrisches Trapez, dessen gegenüberliegende, parallele Seiten 4 cm und 7 cm lang sind.

Lösung zur Aufgabe Nr. L3-5

Es gibt unendlich viele Lösungen, da die Höhe des Trapezes variieren kann.
Die folgende Zeichnung ist eine mögliche Lösung:



L3-6 - Minimaldefinition einer Raute

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 29: Die Schülerinnen und Schüler benennen, zeichnen und charakterisieren Figuren aus dem "'Haus der Vierecke"' und unterscheiden definierende und abgeleitete Eigenschaften.
AFB: II

Aufgabe L3-6:

Kreuze von den folgenden Eigenschaften eines Vierecks so wenige Eigenschaften wie möglich an, damit diese zusammen eine Definition einer Raute ergeben:

1. Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
2. Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.
3. Gegenüberliegende Seiten sind parallel zueinander.
4. Die Diagonalen sind orthogonal zueinander.

Lösung zur Aufgabe Nr. L3-6

Es müssen genau eine der Eigenschaften 1-3 und die Eigenschaft 4 angekreuzt werden.

L3-7 - Beweis mithilfe der Kongruenzsätze

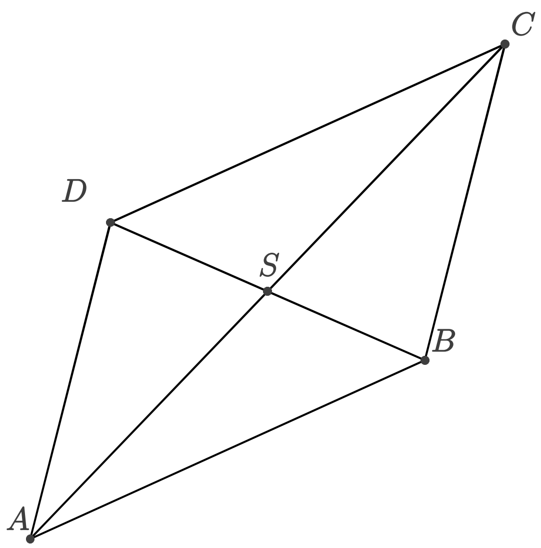
Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 30: Die Schülerinnen und Schüler formulieren elementargeometrische Sätze und nutzen diese für Begründungen und Konstruktionen.
Seite 30: Die Schülerinnen und Schüler führen an ausgewählten Beispielen geometrische Beweise.
AFB: III

Aufgabe L3-7:

In einem Viereck halbieren sich die beiden Diagonalen gegenseitig.
Beweise, dass dann bei diesem Viereck die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind.

Lösung zur Aufgabe Nr. L3-7

Skizze:



Die Voraussetzung verlangt, dass $|\overline{DS}| = |\overline{SB}|$ und $|\overline{AS}| = |\overline{SC}|$ gilt.

Aufgrund des Scheitelwinkelsatzes sind die Winkel $\sphericalangle CSD$ und $\sphericalangle ASB$ gleich groß.

Damit sind die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle CDS$ nach dem SWS-Kongruenzsatz kongruent zueinander, woraus $|\overline{CD}| = |\overline{AB}|$ folgt.

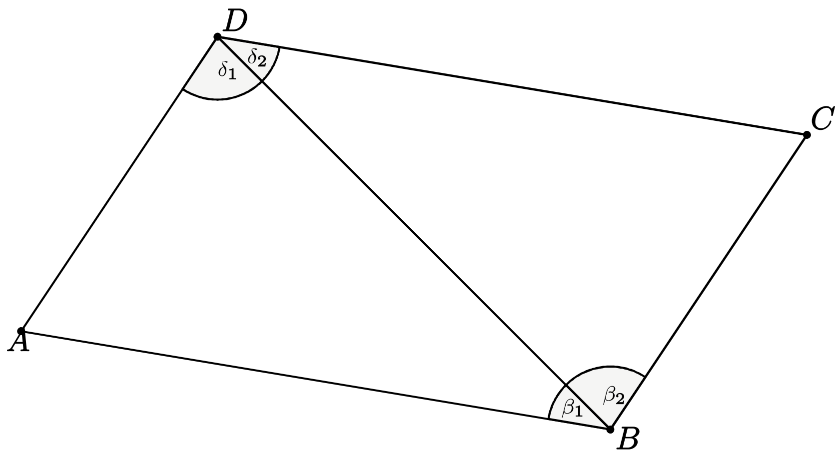
Analog beweist man $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ über die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ASD$ und $\triangle CSB$.

L3-8 - Geometrischer Beweis am Beispiel "‘Parallelogramm"’

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 30: Die Schülerinnen und Schüler formulieren elementargeometrische Sätze und nutzen diese für Begründungen und Konstruktionen.
Seite 30: Die Schülerinnen und Schüler führen an ausgewählten Beispielen geometrische Beweise.
AFB: III

Aufgabe L3-8:

Es soll aus folgender Voraussetzung die folgende Behauptung bewiesen werden:
Voraussetzung: $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$
Behauptung: $\overline{AB} \,||\, \overline{CD}$, $\overline{BC} \,||\, \overline{AD}$



Fritz hat folgenden Beweis aufgeschrieben und dabei Fehler gemacht. Finde und berichtige diese.

Beweis:

1. $|\overline{BD}| = |\overline{DB}|$
2. $|\overline{CD}| = |\overline{AC}|$ nach Voraussetzung
3. $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$ nach Voraussetzung

$\Rightarrow$ Mit dem Kongruenzsatz WSW folgt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle CDB$ und $\triangle ABD$ ($\triangle CDB \cong \triangle ABD$).

Daraus ergibt sich

1. $\beta_1 = \beta_2$
2. $\beta_1 = \delta_2$
3. $\alpha = \gamma$

Da β_2 und δ_1 Stufenwinkel zueinander sind, folgt mit dem Kehrsatz des Stufenwinkelsatzes aus $\beta_2 = \delta_1$, dass die geschnittenen Geraden AD und BC parallel zueinander sind ($AD || BC$).

Da β_1 und δ_2 Wechselwinkel zueinander sind, folgt mit dem Kehrsatz des Wechselwinkelsatzes aus $\beta_1 = \delta_2$, dass die geschnittenen Geraden AD und BC parallel zueinander sind ($AD || BC$).

Lösung zur Aufgabe Nr. L3-8

Beweis:

1. $|\overline{BD}| = |\overline{DB}|$
2. $|\overline{CD}| = \cancel{|\overline{AC}|}$ $|\overline{AB}|$ nach Voraussetzung
3. $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$ nach Voraussetzung

$\Rightarrow$ Mit dem Kongruenzsatz ~~WSW~~ SSS folgt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle CDB$ und $\triangle ABD$ ($\triangle CDB \cong \triangle ABD$).

Daraus ergibt sich

1. $\cancel{\beta_1 = \beta_2}$ $\beta_2 = \delta_1$
2. $\beta_1 = \delta_2$
3. $\alpha = \gamma$

Da β_2 und δ_1 ~~Stufenwinkel~~ Wechselwinkel zueinander sind, folgt mit dem Kehrsatz des ~~Stufenwinkelsatzes~~ Wechselwinkelsatzes aus $\beta_2 = \delta_1$, dass die geschnittenen Geraden AD und BC parallel zueinander sind ($AD \,||\, BC$).

Da β_1 und δ_2 Wechselwinkel zueinander sind, folgt mit dem Kehrsatz des Wechselwinkelsatzes aus $\beta_1 = \delta_2$, dass die geschnittenen Geraden ~~AD und BC~~ AB und CD parallel zueinander sind ~~($AD \,||\, BC$)~~ ($AB \,||\, CD$).

L3-9 - Ähnlichkeit von Dreiecken

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 31: Die Schülerinnen und Schüler formulieren den Ähnlichkeitssatz für Dreiecke und nutzen ihn für Berechnungen und Herleitungen.
AFB: I

Aufgabe L3-9:

Gib an, welche der folgenden 4 Aussagen wahr sind.

Zwei Dreiecke D_1 und D_2 sind ähnlich zueinander, wenn

1. sie in zwei Innenwinkeln übereinstimmen.
2. jede Seite von D_2 um eine feste Streckenlänge länger ist als die entsprechende Seite von D_1.
3. die Verhältnisse der Längen entsprechender Seiten gleich sind.
4. wenn es einen Faktor k gibt, so dass jede Seite von D_2 k-mal so lang ist wie die entsprechende Seite von D_1.

Lösung zur Aufgabe Nr. L3-9

Es sind alle Aussagen wahr bis auf die zweite.

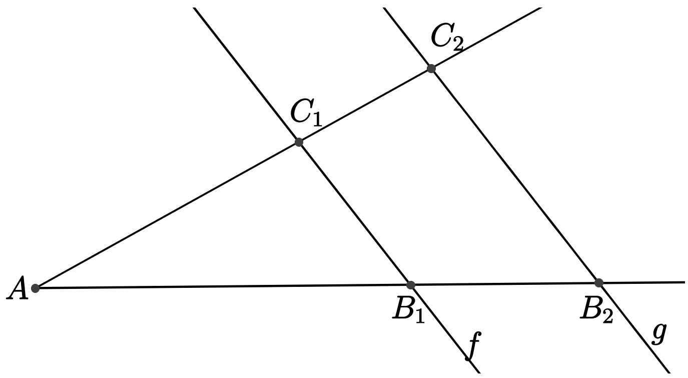
L3-10 - Eigenschaften einer Strahlensatzfigur

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 30: Die Schülerinnen und Schüler formulieren elementargeometrische Sätze und nutzen diese für Begründungen und Konstruktionen.
Seite 30: Die Schülerinnen und Schüler führen an ausgewählten Beispielen geometrische Beweise.
Seite 31: Die Schülerinnen und Schüler formulieren den Ähnlichkeitssatz für Dreiecke und nutzen ihn für Berechnungen und Herleitungen.
AFB: II

Aufgabe L3-10:

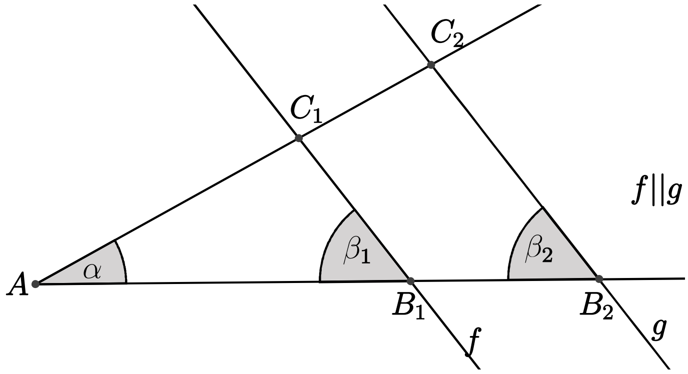
Ergänze eine passende Begründung:

In der folgenden Strahlensatzfigur sind die Dreiecke $\triangle AB_1C_1$ und $\triangle AB_2C_2$ ähnlich zueinander, weil ...



Lösung zur Aufgabe Nr. L3-10

In der Strahlensatzfigur sind die Dreiecke $\triangle AB_1C_1$ und $\triangle AB_2C_2$ ähnlich zueinander, weil die Geraden f und g parallel zueinander verlaufen und damit wegen der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes $\beta_1 = \beta_2$ gilt. Damit haben die beiden Dreiecke zwei gleich große Winkel und sind ähnlich zueinander.

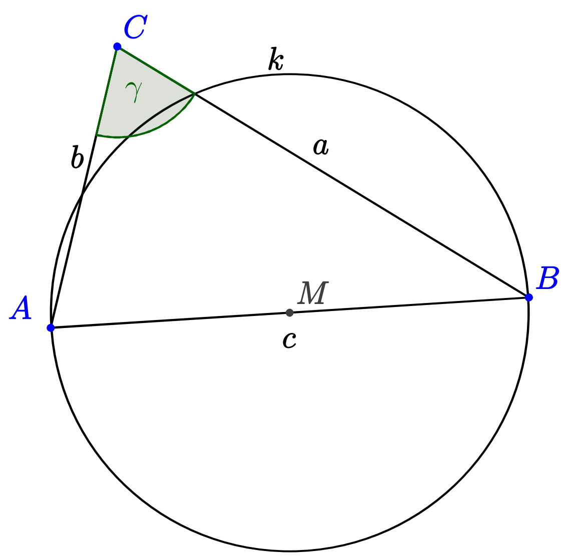


L3-11 - Eigenschaften von Dreiecken und Thaleskreis

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 30: Die Schülerinnen und Schüler formulieren elementargeometrische Sätze und nutzen diese für Begründungen und Konstruktionen.
Seite 31: Die Schülerinnen und Schüler weisen die Gültigkeit des Satzes des Pythagoras sowie dessen Umkehrung nach.
Seite 31: Die Schülerinnen und Schüler beweisen den Satz des Thales und wenden ihn an.
AFB: II

Aufgabe L3-11:

Betrachte die folgende Figur: k ist ein Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$, $\triangle ABC$ ist ein Dreieck. Gib an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.



- Wenn C auf k liegt, dann ist γ ein rechter Winkel.
- C liegt auf k. $\iff$ $\gamma = 90°$
- Wenn C auf k liegt, dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig.
- Wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann liegt C auf k.
- Wenn C auf k liegt, dann ist das Dreieck $\triangle AMC$ gleichschenklig.
- Es gilt stets $a^2 + b^2 = c^2$.
- Damit γ größer als $90°$ wird, muss der Punkt C in den Kreis verschoben werden.

Lösung zur Aufgabe Nr. L3-11

- Wenn C auf k liegt, dann ist γ ein rechter Winkel. (w)
- C liegt auf k. $\quad\Longleftrightarrow\quad \gamma = 90^\circ$ (w)
- Wenn C auf k liegt, dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig. (f)
- Wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann liegt C auf k. (w)
- Wenn C auf k liegt, dann ist das Dreieck $\triangle AMC$ gleichschenklig. (w)
- Es gilt stets $a^2 + b^2 = c^2$. (f)
- Damit γ größer als 90° wird, muss der Punkt C in den Kreis verschoben werden. (w)

4 Leitidee Funktionaler Zusammenhang

L4-1 - Proportionalitätsfaktor

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 32: Die Schülerinnen und Schüler erkennen und charakterisieren Zuordnungen zwischen Objekten in Tabellen, Diagrammen und Texten.
AFB: I

Aufgabe L4-1:

Die proportionale Funktion f ist durch $f(4) = 3$ vollständig bestimmt. Gib die Funktionsgleichung an.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-1

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot x$$

L4-2 - Anhalteweg

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 32: Die Schülerinnen und Schüler lösen einfache und komplexe Sachprobleme.
Seite 32: Die Schülerinnen und Schüler erstellen und interpretieren einfache Diagramme und Graphen.
Seite 32: Die Schülerinnen und Schüler nutzen ein Tabellenkalkulationsprogramm zum Auswerten und Darstellen von Daten.
AFB: I und II

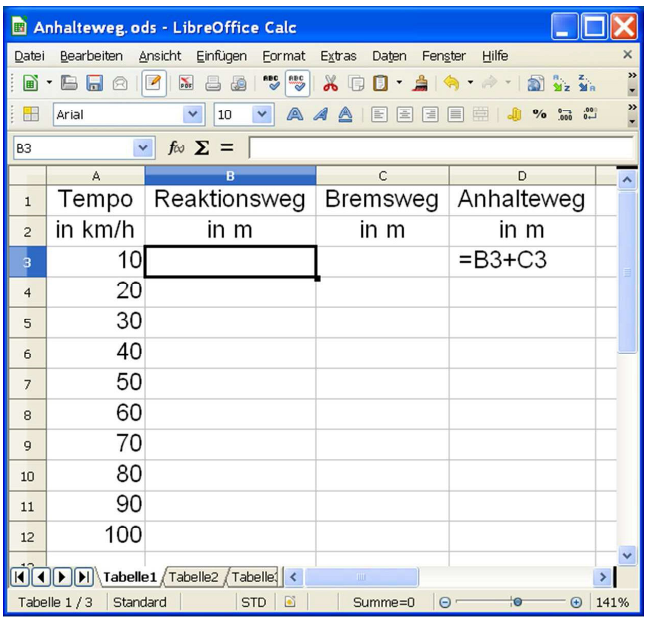
Hinweis: Das Bedienen eines Tabellenkalkulationsprogramms gehört zu den verbindlichen Kerninhalten. Kostenfreie Programme wie die Tabellenkalkulation von Open Office können auch zu Hause genutzt werden.

Aufgabe L4-2:

Fahrschüler lernen "'Anhalteweg = Reaktionsweg + Bremsweg"' und berechnen den Reaktionsweg nach der Vorschrift "'Tempo in km/h durch 10 mal 3"' und den Bremsweg nach "'Tempo in km/h durch 10 mal Tempo in km/h durch 10"'.

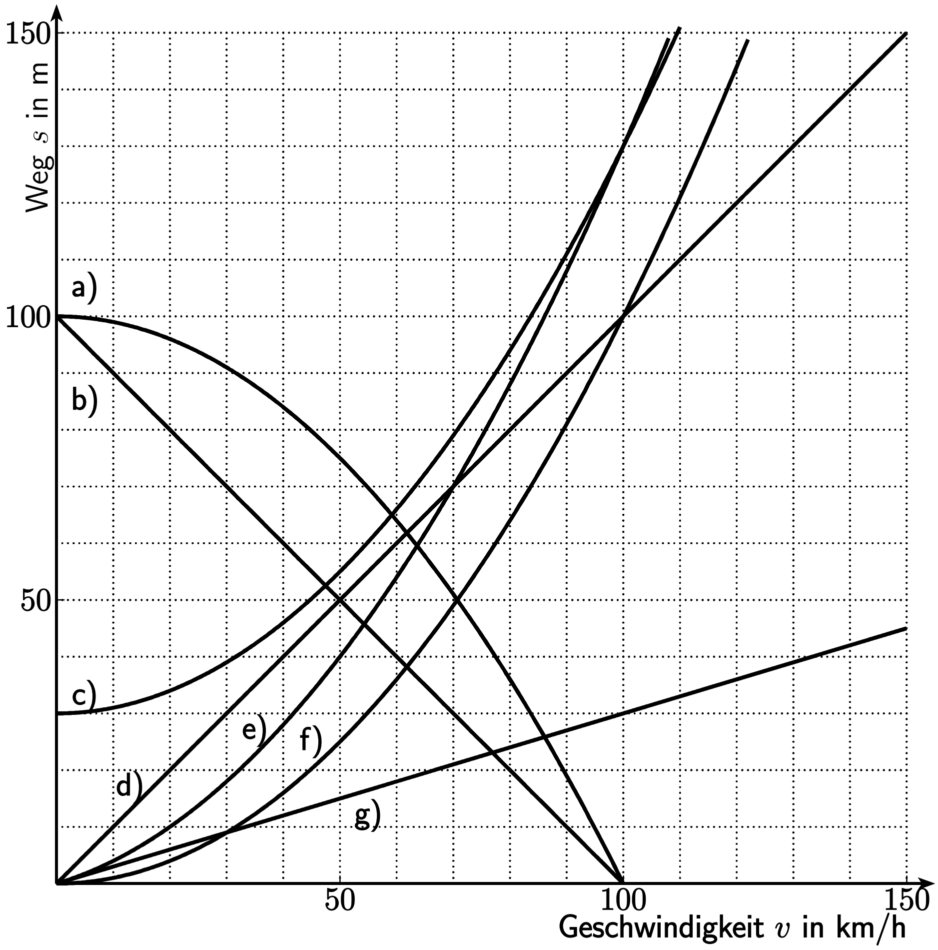
a) Gib den Anhalteweg für 30 km/h und für 60 km/h an.

b) Mit einem Tabellenkalkulations-Programm soll eine Wertetabelle erstellt werden. In Spalte B soll der jeweilige Reaktionsweg und in Spalte C der jeweilige Bremsweg erscheinen. Erläutere die Bedeutung der Formel $= B3 + C3$, die in Zelle $D3$ steht.
Gib geeignete Tabellenkalkulations-Formeln für die Zelle $B3$ und die Zelle $C3$ an.



	A	B	C	D
1	Tempo	Reaktionsweg	Bremsweg	Anhalteweg
2	in km/h	in m	in m	in m
3	10			=B3+C3
4	20			
5	30			
6	40			
7	50			
8	60			
9	70			
10	80			
11	90			
12	100			

c) Entscheide, welcher der Graphen den Anhalteweg, welcher den Reaktionsweg und welcher den Bremsweg beschreibt.



d) Eine Rotte Wildschweine überquert in 75 m Entfernung die Fahrbahn. Bestimme rechnerisch die Geschwindigkeit, bei der der Anhalteweg 75 m lang ist.

e) Die Geschwindigkeit, bei der der Anhalteweg 75 m lang ist, lässt sich auch graphisch bestimmen. Beschreibe das Verfahren.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-2

a) 18 m Anhalteweg bei 30 km/h, 54 m Anhalteweg bei 60 km/h.

b) Die Formel $= B3 + C3$ bewirkt, dass in Zelle $D3$ die Summe der Werte aus den Zellen $B3$ und $C3$ erscheint. Die Formel in Zelle $B3$ muss heißen $= A3/10 * 3$; man könnte auch $= 0{,}3 * A3$ schreiben. Die Formel in Zelle $C3$ muss heißen $= A3/10 * A3/10$; man könnte auch $= (A3/10)\hat{}\,2$ schreiben.

c) Der Reaktionsweg ist proportional zur Geschwindigkeit, deshalb kommen nur die Graphen $d)$ und $g)$ in Frage. $g)$ stellt den Reaktionsweg dar, wie man z.B. aus dem Wertepaar $(\,100\,|\,30\,)$ erkennen kann.
Der Bremsweg nimmt quadratisch mit der Geschwindigkeit zu, es kommt also nur eine nach oben geöffnete Parabel in Frage, die ihren Scheitelpunkt im Ursprung hat. Damit passt nur Graph $f)$, denn Graph $e)$ ist im Ursprung zu steil. Auch z.B. die Wertepaare $(\,50\,|\,25\,)$ oder $(\,60\,|\,36\,)$ passen nur zu Graph $f)$.
Damit bleibt Graph $e)$ für den Anhalteweg, was man z.B. mit den Wertepaaren $(50|40)$, $(\,30\,|\,18\,)$ oder $(\,60\,|\,54\,)$ bestätigen kann.

d) Ansatz: $(0{,}1v)^2 + 0{,}3v = 75$

$$\begin{aligned}(0{,}1v)^2 + 0{,}3v &= 75\\ 0{,}01v^2 + 0{,}3v - 75 &= 0\\ v^2 + 30v - 7500 &= 0\\ v = -15 + \sqrt{7725} \approx 72{,}9 \quad &\vee \quad v = -15 - \sqrt{7725} \approx -102{,}9\end{aligned}$$

Von den beiden Lösungen kommt nur die erste, positive in Frage.

Bei ca. 70 km/h ist der Anhalteweg 75 m lang.

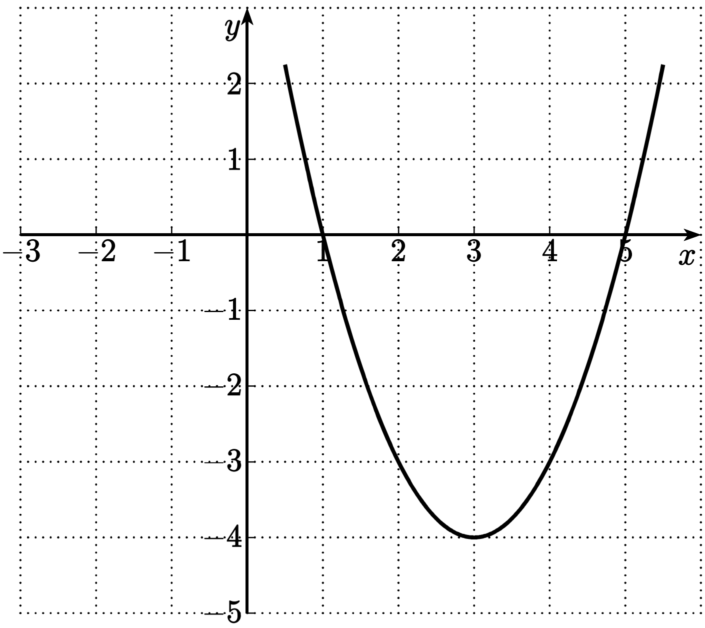
e) Man zeichnet die waagerechte Gerade $s = 75$ und bestimmt die positive Stelle v, an der die Gerade die Parabel $e)$ schneidet.

L4-3 - Scheitelpunkt und Nullstellen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler verstehen das Lösen von Gleichungen als Nullstellenbestimmung von geeigneten Funktionen und umgekehrt.
AFB: I

Aufgabe L4-3:

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$. Man kann die Gleichung auch in die Form $f(x) = (x - d)^2 + e$ bringen.



a) Bestimme aus der Graphik die Nullstellen der Funktion.

b) Bestimme die Werte der Variablen d, e, p und q und erläutere Dein Vorgehen.

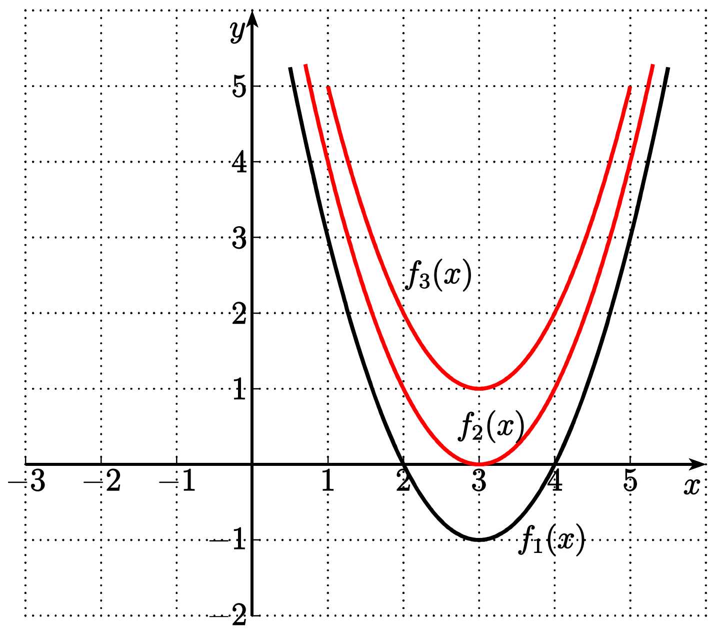
c) Bei anderen Werten von d und e kann die Gleichung $(x - d)^2 + e = 0$ eine Lösung, zwei Lösungen oder keine Lösung haben. Zeichne für jede dieser Möglichkeiten eine Lage des Graphen und erläutere den Sachverhalt.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-3

a) Die Parabel hat die Nullstellen 1 und 5.

b) Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $(3|-4)$. In der Scheitelpunktform $(x-d)^2+e$ sind d und e die Koordinaten des Scheitelpunktes. Daraus ergibt sich unmittelbar $d=3$ und $e=-4$. Durch Ausmultiplizieren erhält man $(x-3)^2-4=x^2-6x+9-4=x^2-6x+5$. Es ist also $p=-6$ und $q=5$.
Alternative: Da es sich um eine verschobene Normalparabel handelt, lässt sich aus der faktorisierten Form $(x-1)\cdot(x-5)$ durch Ausmultiplizieren der Term in der Form $x^2-6\,x+5$ bestimmen.

c) Die Lösungen der Gleichung $(x-d)^2+e=0$ sind die Nullstellen der Funktion $f(x)=(x-d)^2+e$. Verschiebt man die Parabel nach oben, ändert sich die Anzahl der Nullstellen.
Die Parabel $f_1(x)=(x-3)^2-1$ schneidet die x-Achse in zwei Punkten, die Gleichung $(x-3)^2-1=0$ hat zwei Lösungen.
Die Parabel $f_2(x)=(x-3)^2+0$ berührt die x-Achse nur in einem Punkt, die Gleichung $(x-3)^2-0=0$ hat eine Lösung.
Die Parabel $f_3(x)=(x-3)^2+1$ schneidet die x-Achse nicht, die Gleichung $(x-3)^2+1=0$ hat keine Lösung.



L4-4 - Wertetabellen und Funktionalgleichungen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler identifizieren und charakterisieren spezielle Funktionen.
AFB: I

Aufgabe L4-4:

Ergänze die Tabelleneinträge und die Beschriftungen der Pfeile. Vervollständige dann die Funktionalgleichung der betrachteten Funktion.

f ist eine lineare Funktion:

$+1$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	6				

Funktionalgleichung: Für alle x gilt: $f(x+1) =$

g ist eine Exponentialfunktion:

$+1$

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	0,5	1				

Funktionalgleichung: Für alle x gilt: $g(x+1) =$

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-4

f ist eine lineare Funktion:

$+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	6	9	12	15	18

$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$

Funktionalgleichung: Für alle x gilt: $f(x+1) = f(x) + 3$

g ist eine Exponentialfunktion:

$+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	0,5	1	2	4	8	16

$\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2$

Funktionalgleichung: Für alle x gilt: $g(x+1) = g(x) \cdot 2$

L4-5 - Temperaturverlauf

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler charakterisieren numerische Zuordnungen anhand qualitativer Eigenschaften des Graphen.
AFB: II

Hinweis: Die Intention der Aufgabe ist, die Aussage der Diagramme in angemessene, umgangssprachliche Formulierungen zu übersetzen.

Aufgabe L4-5:

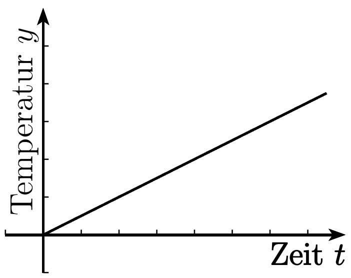


Abb. a)

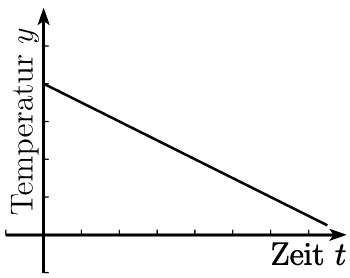


Abb. b)

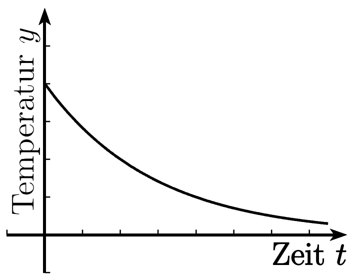


Abb. c)

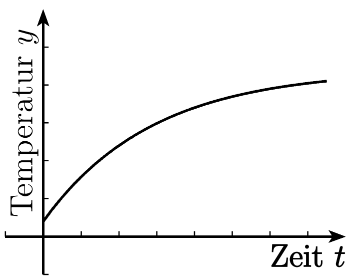


Abb. d)

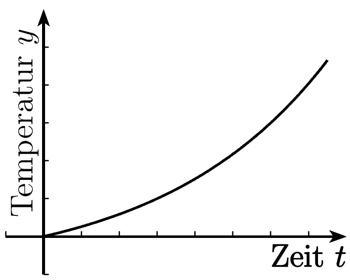


Abb. e)

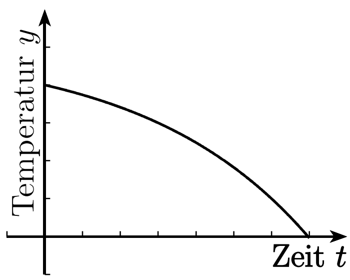


Abb. f)

Beschreibe die Aussagen der Diagramme in Worten.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-5

Alle Diagramme stellen die Veränderung der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit dar. Dabei handelt es sich um

a) eine gleichmäßige Zunahme der Temperatur,

b) eine gleichmäßige Abnahme,

c) eine zunächst schnelle, dann langsame Abkühlung,

d) eine zunächst schnelle, dann langsame Erwärmung,

e) eine zunächst langsame, dann schnelle Erwärmung,

f) eine zunächst langsame, dann schnelle Abkühlung.

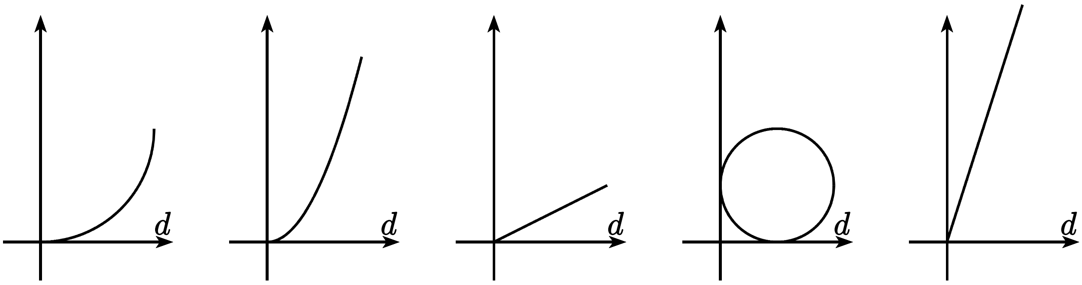
L4-6 - Radius, Umfang und Flächeninhalt als Funktion des Kreisdurchmessers

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler identifizieren und charakterisieren spezielle Funktionen.
AFB: II

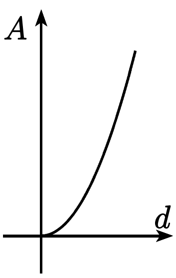
Hinweis: Die Aufgabe vernetzt die Leitideen 2 Messen und 4 Funktionaler Zusammenhang. Die Terme für Radius, Umfang und Flächeninhalt eines Kreises in Abhängigkeit vom Durchmesser werden als Funktionsterme interpretiert, um den proportionalen bzw. quadratischen Zusammenhang hervorzuheben.

Aufgabe L4-6:

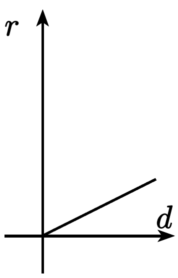
Vergrößert man bei einem Kreis den Durchmesser, dann wachsen der Radius, der Umfang und der Flächeninhalt. Unter den abgebildeten Graphen sind drei, die diese Zusammenhänge darstellen. Gib den jeweils passenden Graphen an.



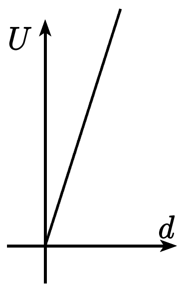
Lösung zur Aufgabe Nr. L4-6



$A(d) = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2$



$r(d) = \frac{1}{2} \cdot d$

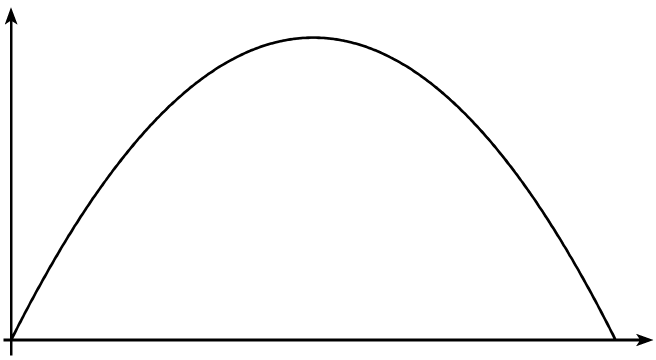


$U(d) = \pi \cdot d$

L4-7 - Schlagballweitwurf

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler verstehen das Lösen von Gleichungen als Nullstellenbestimmung von geeigneten Funktionen und umgekehrt.
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler lösen graphische Probleme durch Lösen und Aufstellen von Gleichungen.
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler modellieren mit allen Funktionsklassen Realsituationen.
AFB: II

Aufgabe L4-7:



Andreas ist beim Schlagballweitwurf sehr gut. Bei einem gelungenen Wurf wird die Flugbahn des Balls ungefähr durch den Graphen der Funktion $f(x) = x - 0{,}0125 \cdot x^2$ beschrieben. Dabei gibt x die horizontale Entfernung des Balls von der Abwurfstelle an.

a) Nenne die Bedeutung der Funktionswerte. Bestimme die Nullstellen der Funktion und erläutere ihre Bedeutung für den Schlagballweitwurf.

b) Berechne die größte Höhe, die der Ball auf seinem Flug erreicht.

c) Die oben genannte Funktionsgleichung berücksichtigt nicht Andreas' Körpergröße. Gib einen entsprechend geänderten Funktionsterm an. Entscheide, ob eine Rechnung mit diesem Funktionsterm eine andere Wurfweite ergibt.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-7

a) Die Funktionswerte geben die Höhe des Balls über dem Boden an. Durch Faktorisieren erhält man aus $0 = x \cdot (1 - 0{,}0125 \cdot x)$ die Lösungsmenge $\{ 0 ; 80 \}$. An der Abwurfstelle bei $x = 0$ ist die Höhe 0. Beim Auftreffen des Balls auf den Boden an der Stelle $x = 80$ ist die Höhe wieder 0. Andreas wirft also 80 m weit.

b) Die größte Höhe erreicht der Ball im Scheitelpunkt der Parabel.
Ausklammern: $f(x) = x - 0{,}0125 \cdot x^2 = -0{,}0125 \cdot (x^2 - 80 \cdot x)$,
quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}0125 \cdot (x^2 - 80\,x + 40^2 - 40^2) \\ &= -0{,}0125 \cdot (x^2 - 80\,x + 40^2) + 0{,}0125 \cdot 40^2 \\ &= -0{,}0125 \cdot (x - 40)^2 + 20 \end{aligned}$$

Elegantere Variante: Der Scheitelpunkt liegt in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen, also bei $x = 40$. $f(40) = 40 - 0{,}0125 \cdot 40^2 = 20$.

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $(40 \mid 20)$. Der Ball erreicht als größte Höhe 20 m.

c) An der Abwurfstelle verlässt der Ball die Hand in etwa 2 m Höhe. Die Funktionsgleichung müsste also $f(x) = x - 0{,}0125 \cdot x^2 + 2$ lauten. Weil diese Parabel im Vergleich zur vereinfachten um 2 m nach oben verschoben ist, liegt die rechte Nullstelle weiter rechts, d.h. die Wurfweite wird größer als bei der vereinfachten Funktionsgleichung.

L4-8 - Tilgungsplan

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 32: Die Schülerinnen und Schüler nutzen ein Tabellenkalkulationsprogramm zum Auswerten und Darstellen von Daten.
AFB: II und III

Hinweis: Das Bedienen eines Tabellenkalkulationsprogramms gehört zu den verbindlichen Kerninhalten. Kostenfreie Programme wie die Tabellenkalkulation von Open Office können auch zu Hause genutzt werden.

Aufgabe L4-8:

a) Bei einem Bankkredit von 100 000 € wurde ein Zinssatz von 4,75 % p.a. und eine monatliche Rückzahlung von 1 000 € vereinbart. Auch die Zinsen werden monatlich berechnet. Laufzeit des Vertrages: 10 Jahre.
Stelle mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms den Rückzahlungsverlauf (gezahlte Zinsen, Tilgung, Restschuld) für das erste Jahr dar. Eine solche Tabelle nennt die Bank Tilgungsplan.

b) Ein anderer Kunde, der ebenfalls 100 000 € bei der Bank leihen will, kann nur 400 € monatlich zurückzahlen. Erörtere diesen Vorschlag aus Sicht der Bank. Nenne Kriterien, die eine Bank bei der Festlegung der Rückzahlungshöhe bei einem Kredit mit dem oben genannten Zinssatz beachten sollte.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-8

a)

C4 =B4*0,0475/12

	A	B	C	D	E
3	Monat	Schulden	Zinsen	Tilgung	Restschuld
4	1	100000,00	395,83	604,17	99395,83
5	2	99395,83	393,44	606,56	98789,28
6	3	98789,28	391,04	608,96	98180,32
7	4	98180,32	388,63	611,37	97568,95
8	5	97568,95	386,21	613,79	96955,16
9	6	96955,16	383,78	616,22	96338,94
10	7	96338,94	381,34	618,66	95720,28
11	8	95720,28	378,89	621,11	95099,17
12	9	95099,17	376,43	623,57	94475,61
13	10	94475,61	373,97	626,03	93849,57
14	11	93849,57	371,49	628,51	93221,06
15	12	93221,06	369,00	631,00	92590,06

	A	B	C	D	E
1	Tilgungsplan				
2					
3	Monat	Schulden	Zinsen	Tilgung	Restschuld
4	1	100000,00	=B4*0,0475/12	=1000-C4	=B4-D4
5	2	=E4	=B5*0,0475/12	=1000-C5	=B5-D5
6	3	=E5	=B6*0,0475/12	=1000-C6	=B6-D6
7	4	=E6	=B7*0,0475/12	=1000-C7	=B7-D7

b) Unter den gegebenen Bedingungen beträgt die Zinszahlung im ersten Monat 395,83 €. Es würde also kaum eine Tilgung der Schuld erfolgen, und die Bank würde auf den Schulden sitzen bleiben.
Mögliche Kriterien: angemessene Anfangstilgung, maximale Laufzeit bis zur vollständigen Tilgung (z.B. 30 Jahre), Alter des Kunden, Finanzkraft des Kunden, Sicherheiten des Kunden

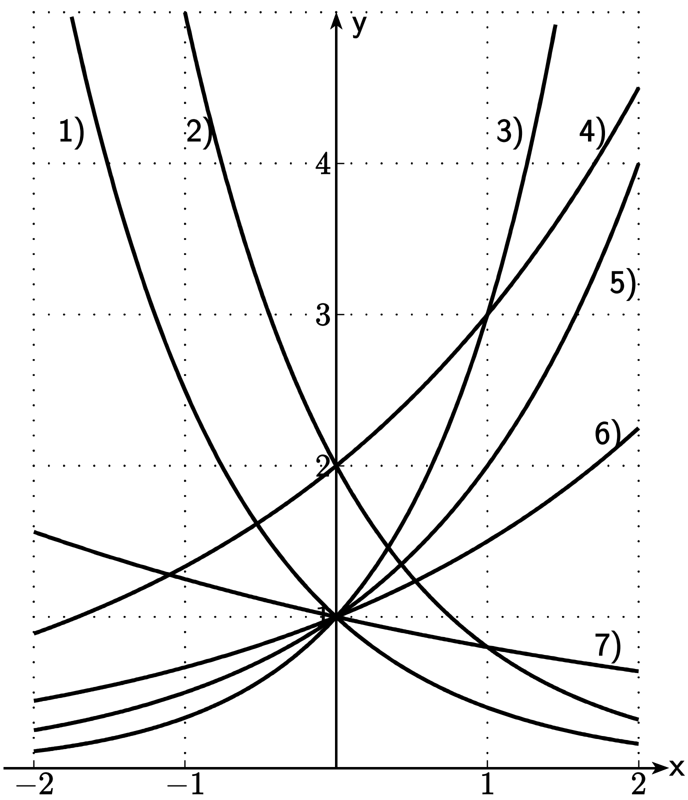
L4-9 - Funktionsgraphen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler wechseln situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen Tabelle, Graph, Text und Term.
AFB: I

Aufgabe L4-9:

Ordne die Funktionsgraphen richtig zu.

- $f(x) = 1{,}5^x$
- $g(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$
- $h(x) = 3^x$
- $j(x) = 0{,}4^x$
- $k(x) = 0{,}8^x$



Lösung zur Aufgabe Nr. L4-9

- $6) \to f(x)$
- $4) \to g(x)$
- $3) \to h(x)$
- $1) \to j(x)$
- $7) \to k(x)$

L4-10 - Kapitalverzinsung

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler wechseln situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen Tabelle, Graph, Text und Term.
AFB: I

Aufgabe L4-10:

Ein Kapital von 10 000 Euro wird inklusive Zinsen zunächst für drei Jahre zu einem Zinssatz von 4 % angelegt und anschließend noch einmal acht Jahre lang zu 5 %.

a) Berechne die Höhe des Endkapitals am Ende der elf Jahre.

b) Bestimme die Höhe des Zinssatzes, mit dem man dasselbe Endkapital bei gleichmäßiger Verzinsung erhält. (Falls du Aufgabe a) nicht lösen konntest, verwende ein fiktives Endkapital von 15 000 Euro.)

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-10

a) $K(3) = 10\,000\,€ \cdot 1{,}04^3 \approx 11\,248{,}64\,€$

$K(11) = K(3) \cdot 1{,}05^8 \approx 16\,619{,}36\,€$

Das Endkapital nach 11 Jahren beträgt 16 619,36 €.

b)

$$\begin{aligned} 16\,619{,}36 &= 10\,000 \cdot a^{11} \\ a^{11} &= 1{,}661936 \\ a &= \sqrt[11]{1{,}661936} \approx 1{,}04726 \end{aligned}$$

Der mittlere Zinssatz beträgt ca. 4,73 %.

L4-11 - Vergleich von Zins und Zinseszins

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler wechseln situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen Tabelle, Graph, Text und Term.
AFB: I und II

Aufgabe L4-11:

a) Berechne, um wie viel Prozent ein Kapital wächst, das 10 Jahre lang zu einem Zinssatz von 3 % angelegt wurde.

b) Berechne, um wie viel Prozent ein Kapital wächst, das 10 Jahre lang zu einem Zinssatz von 3 % angelegt wurde, wenn die Zinsen nicht mitverzinst werden.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-11

a) $K(10) = K(0) \cdot 1{,}03^{10} \approx K(0) \cdot 1{,}3439$.
Das Kapital wächst um 34,39 %.

b) Das Kapital wächst um $10 \cdot 3\,\% = 30\,\%$.

L4-12 - Funktionswert an der Stelle 2

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler wechseln situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen Tabelle, Graph, Text und Term.
AFB: II

Hinweis: Die Funktionsschreibweise soll bereits in der Sek. I eingeführt werden (Fachanforderungen Seite 32). Die Aufgabe setzt das Lesen "'f von 2"' und die Identifikation des Arguments als Stelle $x = 2$ und des Funktionswertes als $y = f(2)$ voraus.

Aufgabe L4-12:

Gib fünf Funktionen an, die die Eigenschaft $f(2) = 5$ haben.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-12

Zum Beispiel:

- konstante Funktion: $f(x) = 5$
- proportionale Funktion: $f(x) = \frac{5}{2} \cdot x$
- lineare Funktion: $f(x) = 2 \cdot x + 1$ oder $f(x) = 4 \cdot x - 3$
- antiproportionale Funktion: $f(x) = \dfrac{10}{x}$
- quadratische Funktion $f(x) = x^2 + 1$ oder $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + 3$
- Exponentialfunktion $f(x) = \frac{5}{4} \cdot 2^x$

L4-13 - Bestimmung von Funktionstermen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler wechseln situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen Tabelle, Graph, Text und Term.
AFB: II

Aufgabe L4-13:

Die Graphen einer linearen Funktion und einer Exponentialfunktion verlaufen durch die Punkte $P(2\,|\,196)$ und $Q(4\,|\,9604)$. Bestimme für beide Graphen die y-Koordinate des Punktes an der Stelle $x = 3$.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-13

Lineare Funktion:
Eine Herleitung mit der Vorstellung vom Steigungsdreieck ist möglich. Da 3 in der Mitte zwischen 2 und 4 liegt, liegt der zugehörige Funktionswert in der Mitte zwischen 196 und 9 604. Er ist also $\frac{9\,604-196}{2} = 4\,704$.

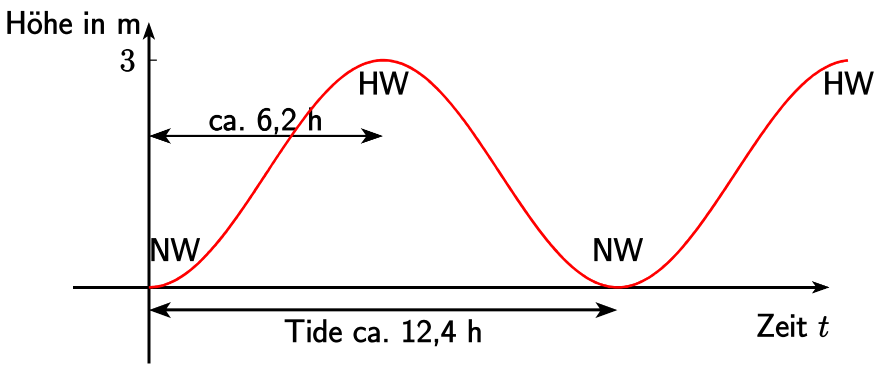
Exponentialfunktion:
Hier ist die Bestimmung der Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot a^x$ notwendig.
$f(2) = k \cdot a^2 = 196$ und $f(4) = 9\,604 = k \cdot a^4$=9 604.
Mit $k = \frac{196}{a^2}$ folgt $9\,604 = 196\,a^2$, und somit $a = 7$.
Es folgt $k = 4$. Also lautet die Funktionsgleichung $f(x) = 4 \cdot 7^x$.
Der Funktionswert an der Stelle $x = 3$ ist $f(3) = 4 \cdot 7^3 = 1\,372$.

L4-14 - Tidenkurve

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler modellieren mit allen Funktionsklassen Realsituationen.
AFB: II

Hinweis: Das Zeichnen von Graphen mit dem Computer gehört zu den verbindlichen Kerninhalten. Kostenfreie Funktionsplotter wie z.B. das Programm GeoGebra können auch zu Hause genutzt werden.

Aufgabe L4-14:

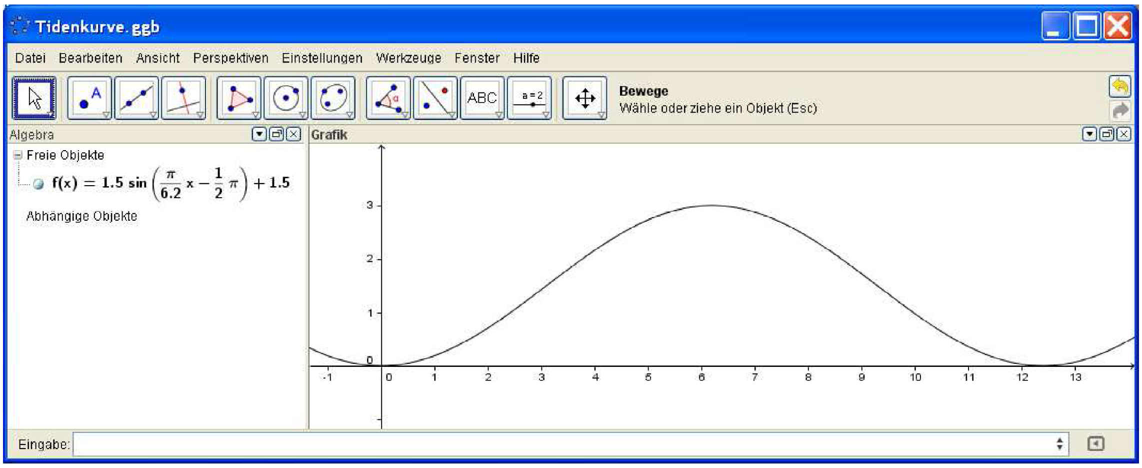


Die Abbildung ist eine vereinfachte Tidenkurve und zeigt den Wasserstand für einen Punkt, der bei Ebbe gerade trockenfällt. Der Graph kann näherungsweise durch die Funktionsgleichung $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$ beschrieben werden.
Bestimme a, b, c und d.
Überprüfe Deine Rechnung, indem Du den Graphen mit dem Computer zeichnen lässt.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-14

NW entspricht dem Wert 0, HW dem Wert 3. Die sinusförmige Kurve ist um 1,5 angehoben und hat die Amplitude 1,5, d.h. $d = 1{,}5$ und $a = 1{,}5$. Die Tide entspricht einer Periode. $b \cdot 12{,}4 = 2\,\pi$, d.h. $b = \frac{2\,\pi}{12{,}4} = \frac{\pi}{6{,}2} \approx 0{,}5067$. Da zum Zeitpunkt $t = 0$ Niedrigwasser herrscht, ist die sinusförmige Kurve um eine Viertelperiode nach rechts verschoben. Es muss also $c = -\frac{1}{4} \cdot 2\,\pi = -\frac{1}{2}\,\pi \approx -1{,}5707$ sein. Die Funktionsgleichung lautet $f(t) = 1{,}5 \cdot \sin(\frac{\pi}{6{,}2} \cdot t - \frac{1}{2}\,\pi) + 1{,}5$.

Zeichnung des Graphen z.B. mit GeoGebra.



L4-15 - Funktionsterme aus textlichen Beschreibungen erstellen

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler modellieren mit allen Funktionsklassen Realsituationen.
AFB: II, teilweise auch III

Aufgabe L4-15:

Gib zu den folgenden Sachverhalten je eine Funktion in Form einer Funktionsgleichung an, die diesen Sachverhalt quantitativ beschreibt.

a) Der Luftdruck in Meereshöhe berägt 1013 hPa. Er nimmt alle 5500 Höhenmeter um 50 % ab.

b) Ein LKW mit der Leermasse 3,5 Tonnen wird mit Kies beladen. Ein Kubikmeter Kies wiegt 1,5 Tonnen.

c) Herr Schmidt legt 12000 Euro zu zu einem jährlichen Zinssatz von 2,5 Prozent an.

d) Ein Riesenrad hat einen Durchmesser von 40 Metern, der Drehpunkt befindet sich in einer Höhe von 25 Metern. Es dreht sich mit einer Umdrehung pro Minute. Zu Beginn der Fahrt befindet sich die Gondel, in der Kathrin und Bernd sitzen, am tiefsten Punkt des Rades.

e) Mit einem Zaun der Länge 100 m soll ein rechteckiges Gelände vollständig eingezäunt werden.

f) Für einen Euro erhält man am heutigen Tag genau 1,31 US-Dollar.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-15

Vorbemerkung: Die in den Texten beschriebenen Sachverhalte ermöglichen zum Teil die Angabe mehrerer, verschiedener Zuordnungen. Die Form des Funktionsterms hängt weiterhin von der Wahl der Einheiten bei Ausgangsgröße und zugeordneter Größe ab und kann außerdem durch Termumformungen verschieden aussehen.
Die Sachverhalte werden in der folgenden Lösung über Zuordnungen zwischen reellen Zahlen beschrieben und nicht als Zuordnungen zwischen Größenbereichen. Daher erfolgt stets in einem Zusatz eine Erklärung, wie die Ausgangswerte und die zugeordneten Werte zu interpretieren sind.

a) Sei x die Höhe in Metern und $p(x)$ der Luftdruck in der Höhe x in hPa, so gilt
$p(x) = 1013 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x/5500}$.

b) Sei x die geladene Kiesmenge in Kubikmetern und $m(x)$ die Gesamtmasse des LKW in Tonnen bei der Beladungsmenge x, so gilt
$m(x) = 1{,}5 \cdot x + 3{,}5$.

c) Sei $t \geq 0$ die Zeit in Jahren nach Anlagebeginn und $k(t)$ das Kapital in Euro zur Zeit t, so gilt
$k(t) = 12000 \cdot 1{,}025^t$.

d) Sei t die Zeit in Minuten und $h(t)$ die Höhe der Gondel (genauer: ihres Aufhängepunktes auf dem Rand des Radkreises) über dem Erdboden zur Zeit t in Metern, so gilt
$h(t) = 25 - 20 \cdot \cos(2\pi \cdot t) = 25 + 20 \cdot \sin(2\pi \cdot t - \frac{\pi}{2})$.

e) Seien a und b die Seitenlängen des rechteckigen Geländes (in Metern) und A dessen Flächeninhalt (in Quadratmetern). Dann gilt:
$b(a) = 50 - a$
$a(b) = 50 - b$
$A(a) = (50 - a) \cdot a = -a^2 + 50a$
$A(b) = (50 - b) \cdot b = -b^2 + 50b$
Dabei muss jeweils $0 < a{,}b < 50$ gelten.

f) Sei e der Betrag in Euro und $u(e)$ der entsprechende Betrag in US-Dollar, so gilt
$u(e) = 1{,}31 \cdot e$.
Sei u der Betrag in US-Dollar und $e(u)$ der entsprechende Betrag in Euro, so gilt
$e(u) = \frac{1}{1{,}31} \cdot u$.

L4-16 - Wertverlust

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler modellieren mit allen Funktionsklassen Realsituationen.
AFB: II bis III

Hinweis: Die Aufgabe verlangt ein Umdenken zwischen den Begriffen Wert und Wertverlust. Das Zitat, das nicht korrekt von "'Prozentpunkten"', sondern ungenau von Prozent spricht, wurde in der Aufgabenstellung bewusst nicht verändert. Ähnliche Ungenauigkeiten sind in Zeitungen häufig anzutreffen und können von authentischen Aufgabenstellungen aufgegriffen werden. Die Eignung der für die mathematische Beschreibung verwendeten Funktionstypen zu beurteilen stellt Anforderungen im Bereich III.

Aufgabe L4-16:

In der Online-Ausgabe eines Nachrichtenmagazins finden sich die folgenden Informationen: "'Der durchschnittliche Wertverlust über alle Pkw-Klassen hinweg beträgt bei einer Jahresfahrleistung von 15 000 Kilometern im ersten Jahr nach der Neuzulassung 24,9 Prozent. In den folgenden Jahren sind es jeweils nur rund fünf bis sechs Prozent."'

Alter	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
Wertverlust	24,9 %	30,3 %	35,7 %	41,7 %	47,7 %

Quelle: https://www.gap24.de/download/Die_verkannte_Groesse.pdf

a) Der Anschaffungspreis eines Pkw beträgt 20 000 €. Stelle den Wert des Pkw im Alter von 0 bis 5 Jahren graphisch dar; gehe dabei von den Tabellenwerten für den durchschnittlichen Wertverlust aus.

b) Begründe:

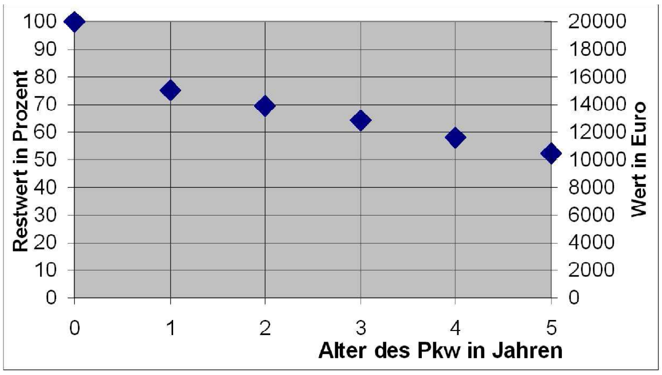
1. In dem Zitat "'In den folgenden Jahren sind es jeweils nur rund fünf bis sechs Prozent."' wird als Grundwert der Anschaffungspreis des Pkw vorausgesetzt.
2. Der in der Tabelle beschriebene Wertverlust kann sich in den nächsten Jahren nicht in der gleichen Weise beliebig lange fortsetzen.

c) In Mathematikaufgaben wird häufig angenommen, dass der Wert W eines Pkw in Abhängigkeit von seinem Alter sich näherungsweise durch die Funktion $W(t) = a \cdot q^t$ beschreiben lässt. Bestimme einen Term für die Funktion W.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-16

a)

	neu	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
Wertverlust in Prozent	0	24,9	30,3	35,7	41,7	47,7
Restwert in Prozent	100	75,1	69,7	64,3	58,3	52,3
Wert in Euro	20 000	15 020	13 940	12 860	11 660	10 460



b) 1. Die Aussage "'In den folgenden Jahren sind es jeweils nur rund fünf bis sechs Prozent."' passt nur dann zu der Tabelle, wenn stets der Anschaffungspreis des Pkw als Grundwert vorausgesetzt wird. Die Tabellenwerte ändern sich ziemlich genau in Schritten von 5 Prozentpunkten, zeigen also einen ungefähr linearen Verlauf. Würde sich die Angabe "'fünf Prozent Wertverlust"' jeweils auf den Vorjahreswert beziehen, wäre es ein exponentieller Verlauf, die Differenz benachbarter Tabellenwerte würde von Jahr zu Jahr kleiner werden, was nicht der Fall ist.

2. Der in der Tabelle beschriebene Wertverlust kann sich in den nächsten Jahren nicht in der gleichen Weise linear beliebig lange fortsetzen, weil sonst der Wertverlust über 100 % wachsen bzw. der Wert des Pkw negative Werte annehmen würde.

c) Der Anfangswert $a = W(0)$ ergibt sich unmittelbar aus dem Kaufpreis; $a = 20\,000$ €. Je nach Vorgehen sind verschiedene Werte für den Parameter q möglich, z.B.

$W(1) = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}249) = 20\,000 \cdot 0{,}751 = 20\,000 \cdot q^1 \;\Rightarrow\; q = 0{,}751$ oder

$W(5) = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}477) = 20\,000 \cdot 0{,}523 = 20\,000 \cdot q^5 \;\Rightarrow\; q = \sqrt[5]{0{,}523} \approx 0{,}878$

oder Mittelwertbildung aus 5 Werten $q \approx 0{,}84$.

L4-17 - Treibstoffverbrauch eines Airbus

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler modellieren mit allen Funktionsklassen Realsituationen.
AFB: III

Aufgabe L4-17:

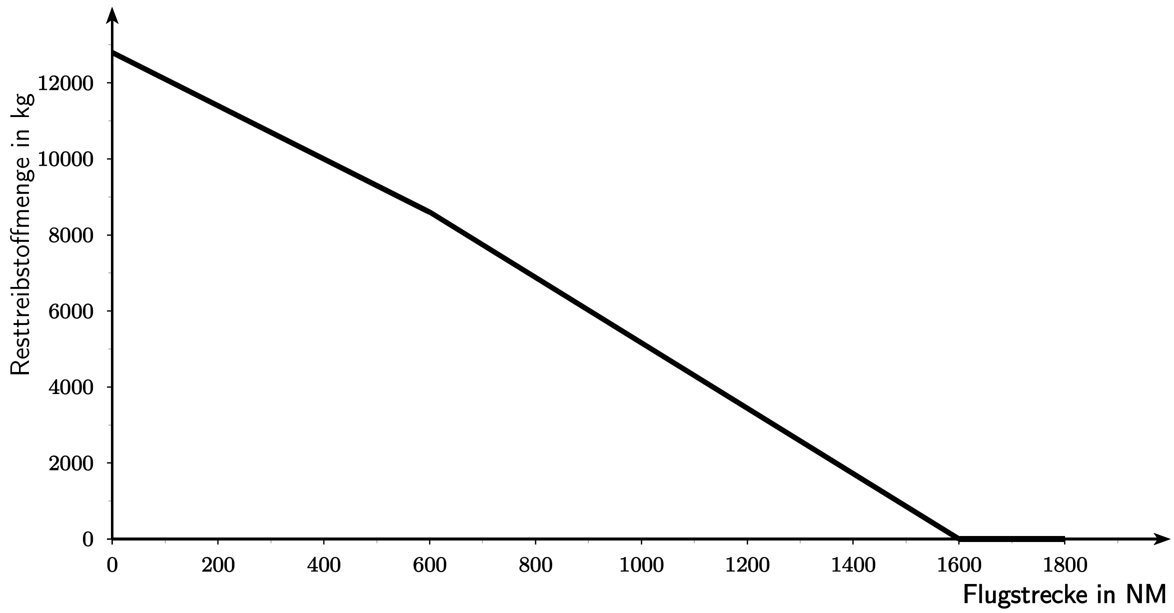
Ein Airbus A 321 hat auf einem Mittelstreckenflug zwischen Deutschland und Italien nach 200 NM Flugstrecke noch 11 320 kg Treibstoff, nach insgesamt 300 NM noch 10 640 kg Treibstoff an Bord (NM = Nautische Meile).

a) Gib begründet an, wie weit der Airbus fliegen kann.

b) Ein Unwetter zwingt die Maschine nach insgesamt 600 NM Flugstrecke zu einer Kursänderung. Entscheide, ob der Ausweichflughafen in insgesamt 1800 NM Entfernung noch sicher erreicht werden kann, wenn die Kursänderung den Treibstoffverbrauch durch Gegenwind um durchschnittlich 12 % erhöht.

c) Kommerzielle Flugzeuge werden so betrieben, dass am Zielflughafen eine gesetzliche Mindestreserve für mindestens 30 min Restkraftstoff zur Verfügung steht. Der Airbus fliegt mit 440 NM/h. Entscheide, ob der Pilot den Ausweichflughafen so erreichen kann, dass dort der vorgeschriebene Restkraftstoff bei der Landung noch in den Tanks ist.

d) Entscheide, ob der folgende Graph den Flug mit Kursänderung beschreibt.



Lösung zur Aufgabe Nr. L4-17

a) Mit den gegebenen Daten ist eine lineare Näherung, wie sie in der Praxis durchaus üblich ist, möglich. Man erhält die Funktionsgleichung $f(x) = -6{,}8x + 12680$, deren Nullstelle bei bei $x \approx 1864{,}71$ liegt. Dabei wird idealisierend von einem konstanten Treibstoffverbrauch ausgegangen.

b) Ab dem Punkt $(600 \mid 8600)$ muss mit der neuen Funktion $g(x) = -7{,}616x + 13169{,}6$ weiter gerechnet werden. Deren Nullstelle liegt bei $x \approx 1729{,}2$. Theoretisch kann der Flughafen also erreicht werden. Ob der Pilot das bei einer Treibstoffreserve für nur 70 NM riskieren sollte, ist eine andere Frage.

c) Nach der Kursänderung erhöht sich der Kraftstoffverbrauch. Daher müssen am Ausweichflughafen noch 680 kg $\cdot\, 2{,}2 \cdot 1{,}12 = 1675{,}52$ kg in den Tanks sein. Zu lösen ist daher z. B. das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 8600 &= m \cdot 600 + d \\ 1675{,}52 &= m \cdot 1800 + d \end{aligned}$$

oder man bestimmt die Steigung zwischen den Punkten $(600|8600)$ und $(1800|1675{,}52)$. Es ergibt sich die Lösung $m \approx -5{,}77$. Demnach muss der Treibstoffverbrauch um 103 kg/100 NM sinken, was auf Grund des Gegenwindes nicht möglich ist. Der neue Flughafen ist also keinesfalls mit einer ausreichenden Reserve zu erreichen. Man hat zu wenig Sprit an Bord.

d) Nein, die Graphik beschreibt einen Flug, bei dem der Treibstoffvorrat deutlich vor 1800 NM zu Ende geht. Der Rest der Strecke wird nach dieser Graphik im Gleitflug zurückgelegt.

L4-18 - Tanktourismus

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 33: Die Schülerinnen und Schüler modellieren mit allen Funktionsklassen Realsituationen.
AFB: III

Aufgabe L4-18:

Auf dem Weg zur Arbeit ärgert Herr G. sich über den hohen Dieselpreis von 1,46 € pro Liter. Frau G. ärgert sich über den Geländewagen, der 8 Liter auf 100 km verbraucht, und empfiehlt Herrn G. einen insgesamt 3 km langen Umweg zur freien Tankstelle, die nur 1,44 € pro Liter nimmt. Sohn Gerrit schlägt vor: "‘Wir wohnen doch nur 50 km von Dänemark entfernt und könnten ab und zu einen Ausflug machen, dort kostet Diesel nur 1,32 € pro Liter, das lohnt sich bestimmt, weil 60 Liter in den Tank passen"’.
Untersuche die Situation und beurteile die beiden Vorschläge.

Lösung zur Aufgabe Nr. L4-18

Das Fahrzeug verbraucht 8 Liter auf 100 km oder 0,08 Liter pro km. Auf einem 3 km langen Umweg verbraucht das Fahrzeug 0,24 Liter mehr, die ca. 0,35 € kosten. Wenn der Tank fast leer ist, dann müsste Herr G. bei einer Preisdifferenz von 0,02 € pro Liter und einem Tankvolumen von 60 Litern 1,20 € weniger bezahlen und könnte 85 Cent sparen. Nicht gerechnet sind dabei die sonstigen Kosten wie Ölverbrauch und allgemeiner Verschleiß am Fahrzeug. Der Zeitaufwand von ca. 3 Minuten auf der Landstraße lässt sich nicht in Geld beziffern. Die Einsparung ist gering, aber wenn der Umweg nicht als unangenehm empfunden wird, könnte man diesen Vorschlag von Frau G. empfehlen.
Die Fahrt nach Dänemark würde sich am meisten lohnen, wenn bei Ankunft an der Tankstelle der Tank fast leer wäre, was im Alltag nicht immer einzurichten ist. Hin- und Rückfahrt würden einen Verbrauch von 8 Litern verursachen, die zum billigeren dänischen Preis 10,56 € kosten. Der Preisunterschied von 14 Cent pro Liter würde bei 60 Litern nur 8,40 € ausmachen, Ölverbrauch und allgemeinen Verschleiß am Fahrzeug nicht gerechnet. Mit dem Vorschlag von Gerrit ließe sich kein Geld sparen; nur wenn die Familie ohnehin einen Freizeitausflug nach Dänemark plant, sollten sie dann auch dort tanken.

5 Leitidee Daten und Zufall

L5-1 - Auswertung einer Umfrage

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 34: Die Schülerinnen und Schüler nehmen Daten aus vertrauten und vielfältigen Situationen auf und stellen diese dar. Die Schülerinnen und Schüler planen Zufallsexperimente, beschreiben sie, führen sie durch und werten sie aus.
AFB: I

Hinweis: Diese Aufgabe sollten Schüler spätestens am Ende der 7. Klasse lösen können. Dem Histogramm kommt dabei im Hinblick auf die Vorbereitung von Binomialverteilungen bis hin zur Normalverteilung besondere Bedeutung zu.

Aufgabe L5-1:

Lola und Philip befragen die Teilnehmer an der Langen Nacht der Mathematik nach ihrem Alter. Sie halten die Ergebnisse in einer Strichliste fest.

10 bis 13 Jahre	14 bis 17 Jahre	älter als 17 Jahre
𝍸 |	𝍸 |||	||||

Beschreibe drei Möglichkeiten, die Erhebung auszuwerten.
Führe die Auswertungen durch.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-1

Man kann zu dieser Strichliste eine Tabelle mit den absoluten und relativen Häufigkeiten (als Bruch, gerundeter Dezimalbruch, gerundete Prozentsätze) anlegen. Außerdem kann man ein Säulendiagramm, ein Histogramm oder ein Kreisdiagramm zeichnen.

L5-2 - Arithmetischer Mittelwert

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 34: Die Schülerinnen und Schüler nehmen Daten aus vertrauten und vielfältigen Situationen auf und stellen diese dar. Die Schülerinnen und Schüler planen Zufallsexperimente, beschreiben sie, führen sie durch und werten sie aus.
AFB: I

Aufgabe L5-2:

a) Berechne den arithmetischen Mittelwert der Zahlen in der Tabelle.

4	1	3	2	2	6	2	5	5	4	4	4	4	3	1	4	3	4	5	4

b) Da es sich hier um Ergebnisse der Würfe eines Spielwürfels handelt, können in der Liste nur die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 vorkommen. Eine der Zahlen wurde falsch eingetragen. Untersuche, wie stark sich der Mittelwert durch die Korrektur des falschen Eintrags noch ändern kann.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-2

a) Der arithmetische Mittelwert der Zahlen in der Tabelle ist

$$(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6) : 20 = \frac{70}{20} = 3{,}5.$$

b) Der Mittelwert vergrößert sich am stärksten, wenn eine 1 durch eine 6 ersetzt wird und erreicht dann $\frac{75}{20} = 3{,}75$. Der Mittelwert verkleinert sich am stärksten, wenn eine 6 durch eine 1 ersetzt wird und beträgt dann $\frac{65}{20} = 3{,}25$.

L5-3 - Analyse zweier Klassenspiegel

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 34: Die Schülerinnen und Schüler nehmen Daten aus vertrauten und vielfältigen Situationen auf und stellen diese dar. Die Schülerinnen und Schüler planen Zufallsexperimente, beschreiben sie, führen sie durch und werten sie aus.
AFB: II

Aufgabe L5-3:

Untersuche die Klassenspiegel auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

Klassenspiegel der 8a:

1	2	3	4	5	6
3	5	1	3	6	2

Klassenspiegel der 8b:

1	2	3	4	5	6
1	1	10	7	2	1

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-3

Die Durchschnittsnote beider Klassen ist 3,5.

In der 8a gibt es viele gute und viele schlechte Ergebnisse, im Mittelfeld aber nur sehr wenige. In der 8b weichen nur wenige Noten vom Mittelwert stark ab, hier finden sich die meisten Ergebnisse im Dreier- oder Viererbereich.

L5-4 - Datenreihe mit Ausreißer

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 34: Die Schülerinnen und Schüler nehmen Daten aus vertrauten und vielfältigen Situationen auf und stellen diese dar. Die Schülerinnen und Schüler planen Zufallsexperimente, beschreiben sie, führen sie durch und werten sie aus.
AFB: II

Aufgabe L5-4:

In einer Liste stehen 10 Zahlen, der arithmetische Mittelwert dieser Zahlen ist 2,4. Eine 6 wird aus der Liste gestrichen. Berechne den Mittelwert der veränderten Liste.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-4

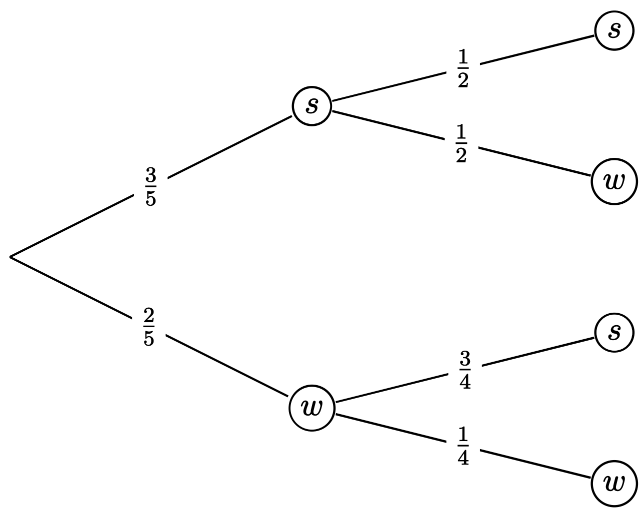
Die 10 Zahlen haben die Summe 24, denn der Mittelwert ist $2{,}4 = 24 : 10$. Streicht man die 6 aus der Liste, haben die verbleibenden 9 Zahlen noch die Summe 18, und ihr Mittelwert ist $18 : 9 = 2$.

L5-5 - Baumdiagramm

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schüler berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mit Hilfe der Pfadregeln.
AFB: II

Aufgabe L5-5:

Überlege Dir zu folgendem Baumdiagramm ein passendes Zufallsexperiment.



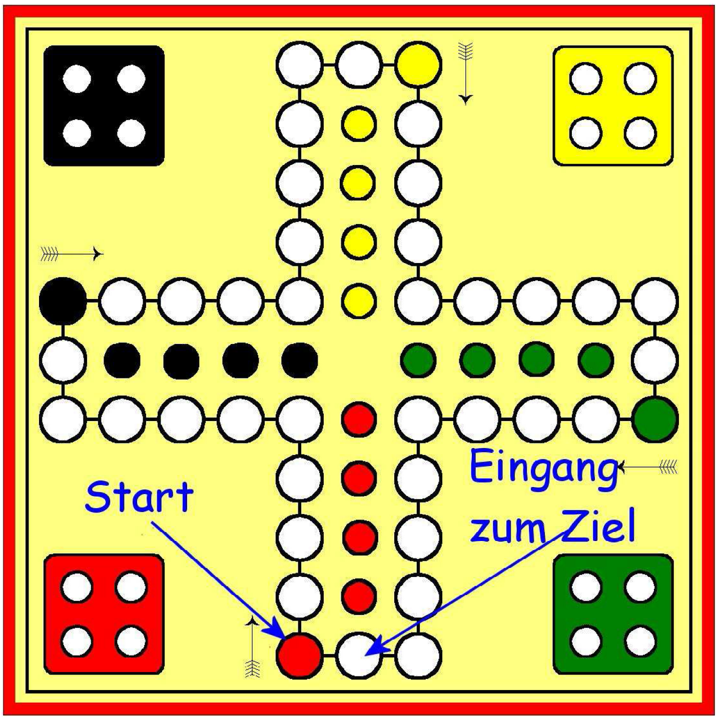
Lösung zur Aufgabe Nr. L5-5

In einer Urne befinden sich drei schwarze und zwei weiße Kugeln. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

L5-6 - Erwartungswert

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 34: Die Schülerinnen und Schüler sagen begründet erwartete absolute Häufigkeiten vorher.
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler ermitteln ermitteln Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bei Laplace-Experimenten durch theoretische Überlegungen.
AFB: I und II

Aufgabe L5-6:



Niemand hat Lust mit Benjamin "'Mensch ärger' Dich nicht"' zu spielen. Er spielt alleine und lässt eine Figur vom Start zum Ziel laufen.
Bestimme die ungefähre Anzahl der notwendigen Würfe.

Benjamin kommt genau auf dem Eingang zum Ziel an.
Ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur mit einem Wurf ins Ziel gelangt.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-6

Benjamin muss 39 Punkte würfeln, um am Eingang zum Ziel anzukommen. Da er bei jedem Wurf durchschnittlich 3,5 Punkte erreicht, muss er wegen $39 : 3{,}5 \approx 11$ ungefähr 11-mal würfeln.

Er kann das Ziel erreichen, wenn er eine 1, 2, 3 oder 4 würfelt. Das sind vier von sechs Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Wurf sein Ziel zu erreichen, ist $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

L5-7 - Baumdiagramm und Pfadregel

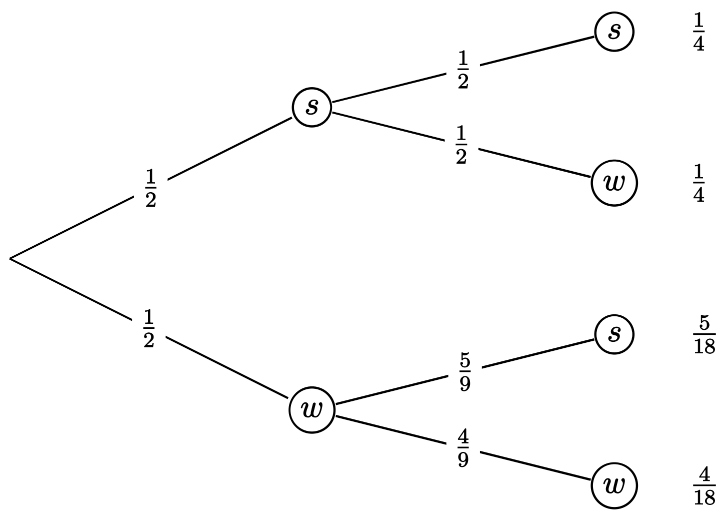
Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe der Pfadregeln.
AFB: II

Aufgabe L5-7:

In einem Behälter befinden sich 5 schwarze und 5 weiße Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen. Ist die erste Kugel schwarz, wird sie in den Behälter zurückgelegt. Ist die Kugel weiß, wird sie nicht zurückgelegt. Dann wird die zweite Kugel gezogen.

Zeichne ein Baumdiagramm. Berechne die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-7



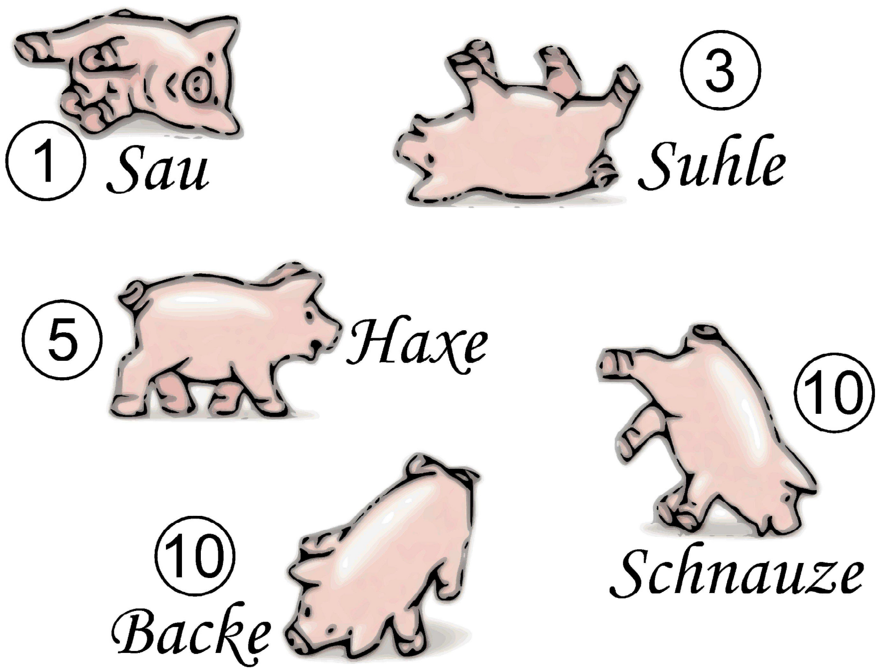
$P(\{ss\}) + P(\{ww\}) = \frac{17}{36}$

L5-8 - Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Bezug zu den Fachanforderungen:
34: Die Schülerinnen und Schüler planen Zufallsexperimente, beschreiben sie, führen sie durch und werten sie aus.
AFB: III

Aufgabe L5-8:

Beim "'Schweine-Würfeln"' werden für die unterschiedlichen Positionen Punkte vergeben.



Die Klasse 8 c möchte herausfinden, ob die Punktevergabe fair ist und plant dazu ein Experiment. Beschreibe die wichtigsten Überlegungen für Planung, Durchführung und Auswertung eines solchen Experiments.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-8

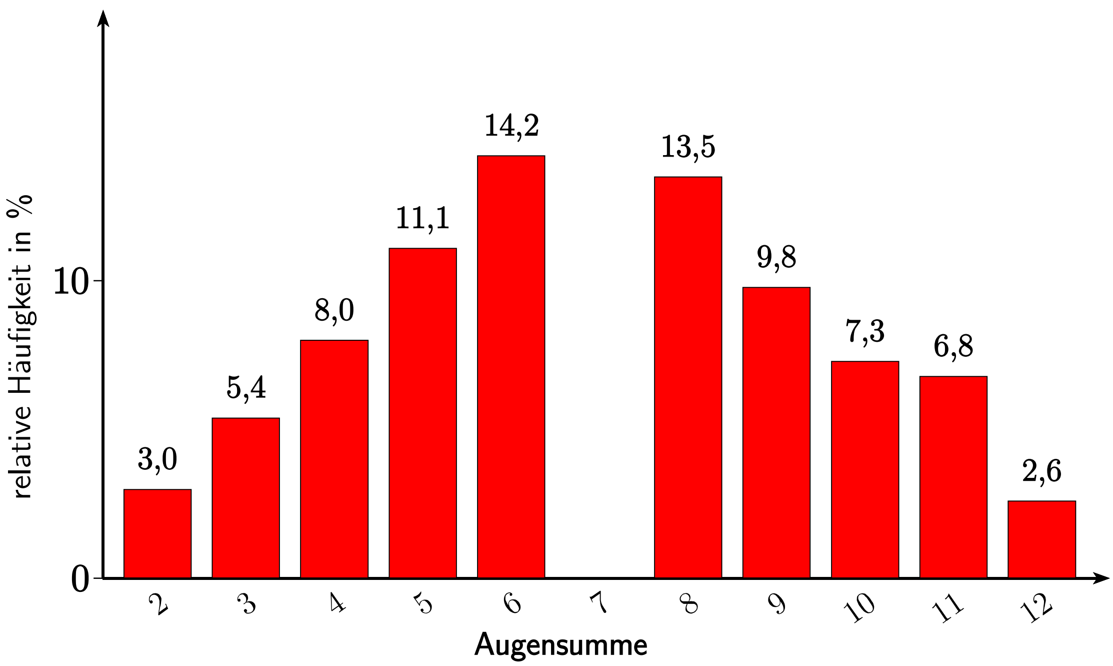
Zuerst wird festgelegt, wie oft mit einem Schwein gewürfelt werden soll. Diese Zahl darf nicht zu klein sein. Danach führt man das Zufallsexperiment durch und dokumentiert die einzelnen Ergebnisse in einer Strichliste. Man liest die absoluten Häufigkeiten ab und berechnet die relativen Häufigkeiten. Jetzt vergleicht man die relativen Häufigkeiten miteinander. Wenn die relative Häufigkeit für ein Ergebnis ungefähr doppelt so groß ist wie für ein anderes, sollte die Punktzahl nur halb so groß sein. Bei den anderen Punktzahlen geht man ähnlich vor.

L5-9 - Häufigkeitsverteilung

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 34: Die Schülerinnen und Schüler planen Zufallsexperimente, beschreiben sie, führen sie durch und werten sie aus.
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler erklären an einem Beispiel den Unterschied zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses.
AFB: II

Aufgabe L5-9:

Die Klasse 8d hat 1000mal jeweils 2 Spielwürfel geworfen und die geworfene Augensumme bestimmt. Das folgende Diagramm zeigt das Ergebnis dieses Großexperiments.



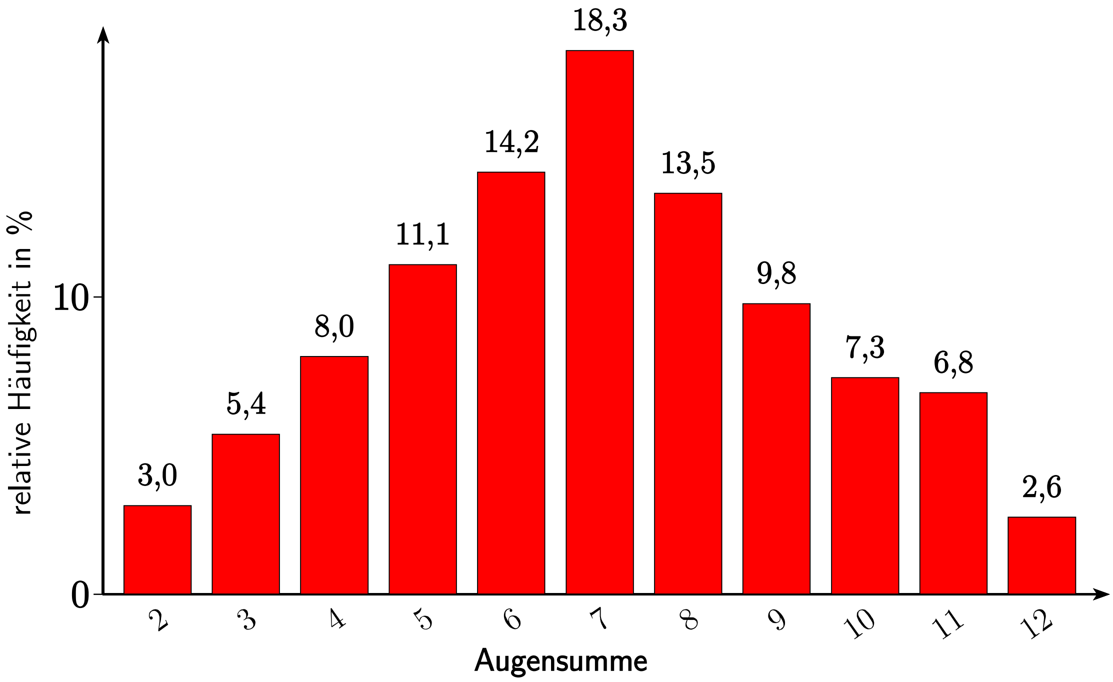
a) Ergänze die Säule für die Augensumme 7. Bestimme die absolute Häufigkeit für die Augensumme 7.

b) Bestimme den Mittelwert der Augensumme bei dem Großexperiment der 8d.

c) Begründe, inwieweit die in dem Säulendiagramm dargestellte Verteilung der Augensumme so zu erwarten war.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-9

a) Das ergänzte Diagramm sieht folgendermaßen aus:



Die absolute Häufigkeit für die Augensumme 7 beträgt $1000 \cdot 18{,}3\,\% = 183$.

b) Der Mittelwert m der Augensumme bei dem Großexperiment beträgt $m = 6{,}982$.

c) Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augensummen bei einem Doppelwurf sind gerundet die folgenden (Berechnung über die 36 Ergebnisse eines Laplace-Experimentes):

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2,8%	5,6%	8,3%	11,1%	13,9%	16,7%	13,9%	11,1%	8,3%	5,6%	2,8%

Die beobachteten relativen Häufigkeiten liegen schon recht nahe bei diesen Wahrscheinlichkeiten, sie erweisen sich also in diesem Fall schon als brauchbare Prognosewerte.

L5-10 - Gegenereignis

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schüler unterscheiden zwischen Ergebnis und Ereignis und berechnen die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen.
AFB: I

Aufgabe L5-10:

Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim dreifachen Wurf eines mit den Zahlen 1 bis 4 beschrifteten Tetraeders mindestens eine Vier zu werfen.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-10

Es wird die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses E: "‘Es wird keine Vier geworfen."’ berechnet.

$$P(E) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit

$$1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 0{,}578125.$$

L5-11 - Produktregel beim Münzwurf

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler berechnen die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen.
AFB: I

Aufgabe L5-11:

Fünf Münzen fallen zu Boden.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie alle mit der Zahl nach unten liegen.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-11

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze Kopf zeigt, ist 0,5.
Deshalb ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

L5-12 - Dreifacher Wurf eines Oktaeders

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler planen zweistufige Zufallsexperimente, führen sie durch und werten sie aus.
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe der Pfadregeln.
AFB: I

Aufgabe L5-12:

Ein mit den Zahlen 1 bis 8 beschrifteter Oktaeder wird dreimal geworfen. Gib drei verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ beträgt.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-12

E_1 : Es wird immer eine gerade Zahl geworfen.
E_2 : Es wird immer eine ungerade Zahl geworfen.
E_3 : Es wird immer eine Primzahl geworfen.

L5-13 - Aussagen über Wahrscheinlichkeiten

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler unterscheiden zwischen Ergebnissen und Ereignissen und berechnen die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen.
AFB: II

Aufgabe L5-13:

Kreuze die wahren Aussagen an.

a) Wenn man 720-mal mit einem normalen Spielwürfel wirft, kann man erwarten, dass 600-mal keine 6 fällt.

b) Wenn die Chance 1:5 ist, ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

c) Es kann nicht sein, dass Du beim Würfeln 30-mal hintereinander eine 6 wirfst.

d) Wirft man 600-mal mit einem Spielwürfel, ist die Wahrscheinlichkeit, 500-mal eine 6 zu werfen, sehr gering.

e) Wenn man mit einem Spielwürfel wirft und die Ergebnisse A: "'Es fällt eine Primzahl."' und B: "'Es fällt keine Primzahl."' betrachtet, hat man es nicht mit einem Laplace-Experiment zu tun.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-13

Die wahren Aussagen sind (a), (b) und (d).

L5-14 - Ereignisse beim doppelten Münzwurf

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler unterscheiden zwischen Ergebnissen und Ereignissen und berechnen die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen.
AFB: II

Hinweis: Ein wichtiges Ziel des Unterrichts ist es, die Begriffe "'Ergebnis"' und "'Ereignis"' zu definieren und gegeneinander abzusetzen. Das Ereignis wird in der Lösung in Textform angegeben. Denkbar ist auch eine Angabe als Menge.

Aufgabe L5-14:

Es wird mit zwei normalen Spielwürfeln geworfen. Die Ergebnisse des Zufallsexperiments sind die Augensummen. Gib ein Ereignis an, das die Wahrscheinlichkeit 0,25 hat.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-14

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	**4**	5	6	**7**
2	3	**4**	5	6	**7**	8
3	**4**	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

Aus der Tabelle liest man ab, dass z. B. das Ereignis "'Die Augensumme ist 4 oder 7"' in 9 von 36 Fällen eintritt. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

L5-15 - Mensch ärger' dich nicht!

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler planen zweistufige Zufallsexperimente, führen sie durch und werten sie aus.
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe der Pfadregeln.
AFB: II

Aufgabe L5-15:

Fynn und Ole spielen "'Mensch ärger' Dich nicht"'. Fynn ist am Zug. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er Oles Spielstein überholt und dann von ihm geschlagen wird, ist $\frac{1}{12}$.
Skizziere eine mögliche Position der beiden Spielsteine.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-15

Eine Möglichkeit ist, dass Fynn drei Felder hinter Ole steht. Dann braucht er eine 4,5 oder 6 um ihn zu überholen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{1}{2}$.
Anschließend benötigt Ole, je nachdem, ob Fynn ein, zwei oder drei Felder vor ihm steht, genau eine 1, genau eine 2 oder genau eine 3, um Fynn hinauszuwerfen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{1}{6}$.
Insgesamt ergibt sich dann die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

L5-16 - Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Spiel

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler planen zweistufige Zufallsexperimente, führen sie durch und werten sie aus.
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe der Pfadregeln.
AFB: II

Hinweis: Es ist zu erwarten, dass die Mehrzahl der Schüler auch ohne Rechnung die Variante A für günstiger hält. Die Aufgabe kann noch dadurch anspruchsvoller gestaltet werden, dass man bei beiden Varianten unterschiedliche Einsätze ins Spiel bringt.

Aufgabe L5-16:

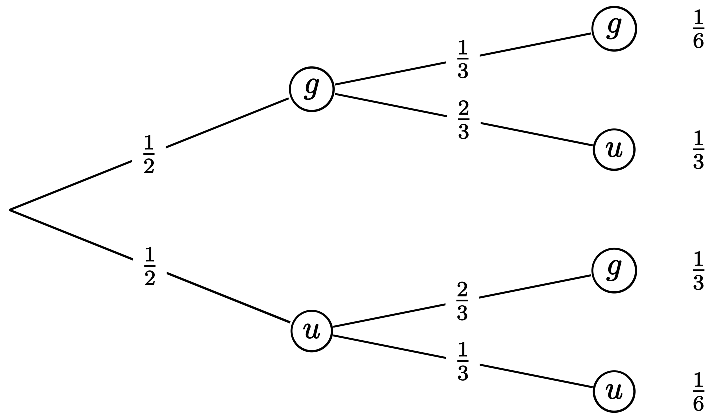
Aus vier Karten, die mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 beschriftet sind, werden zufällig zwei ausgewählt.
Es gibt zwei Spielvarianten:

- A: Du gewinnst, wenn eine gerade und eine ungerade Zahl gezogen wird.
- B: Du gewinnst, wenn entweder zwei gerade oder zwei ungerade Zahlen gezogen werden.

Entscheide Dich begründet für eine der beiden Möglichkeiten.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-16

Das Zufallsexperiment kann als das nacheinander durchgeführte Ziehen zweier Karten aufgefasst werden. Es gibt dann vier Ergebnisse.



Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ist $\frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B ist $\frac{1}{3}$, also nur halb so groß. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist also bei A größer.

L5-17 - Urne mit unbekanntem Inhalt

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler planen zweistufige Zufallsexperimente, führen sie durch und werten sie aus.
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe der Pfadregeln.
AFB: III

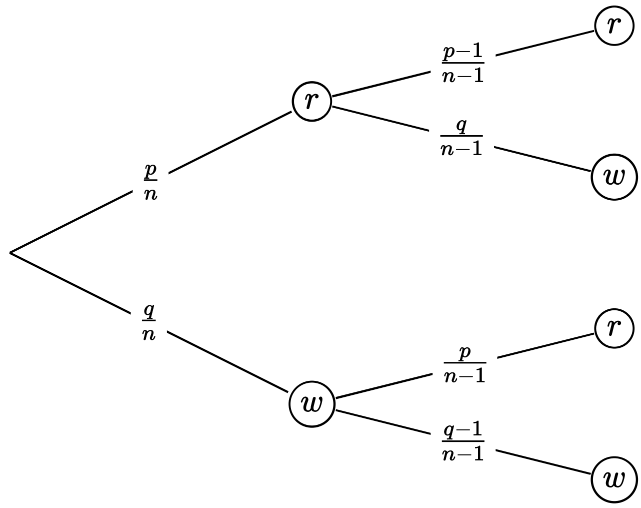
Aufgabe L5-17:

In einem undurchsichtigen Behälter befinden sich rote und weiße Kugeln. Es werden zwei Kugeln gleichzeitig gezogen.
Die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu erhalten, ist $\frac{3}{7}$.

Zeichne ein Baumdiagramm. Gib eine Möglichkeit für die Gesamtzahl der Kugeln vor dem Ziehen sowie für die Anzahlen roter und weißer Kugeln im Behälter an.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-17

Wir gehen davon aus, dass sich in der Urne n Kugeln befinden, davon p rote und q weiße. Außerdem sollen mindestens 2 rote und 2 weiße Kugeln dabei sein. Das gleichzeitige Ziehen zweier Kugeln kann man sich dann auch als Ziehen ohne Zurücklegen vorstellen. Wir erhalten folgendes Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier Kugeln gleicher Farbe ist

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{p-1}{n-1} + \frac{q}{n} \cdot \frac{q-1}{n-1} = \frac{p(p-1)+q(q-1)}{n(n-1)}.$$

Da diese Wahrscheinlichkeit nach Voraussetzung $\frac{3}{7}$ sein soll, bietet es sich an, davon auszugehen, dass sich 7 Kugeln in der Urne befinden. Daraus folgt, dass $p \cdot (p-1) + q \cdot (q-1)$ durch $n - 1 = 6$ teilbar sein muss.
Aus der Tabelle

p	q	$p(p-1)+q(q-1)$
2	5	22
3	4	18
4	3	18
5	2	22

liest man ab, dass nur zwei Fälle in Frage kommen, die auch tatsächlich auf die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{7}$ führen. In der Urne könnten sich also 3 rote und 4 weiße oder auch 4 rote und 3 weiße Kugeln befinden.

L5-18 - Zwei Glücksräder

Bezug zu den Fachanforderungen:
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler planen zweistufige Zufallsexperimente, führen sie durch und werten sie aus.
Seite 35: Die Schülerinnen und Schüler berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe der Pfadregeln.
AFB: III

Aufgabe L5-18:

Lisa und Hannah wollen für ein Schulfest zwei Glücksräder bauen, die folgende Bedingungen erfüllen sollen:

1. Auf jedem Glücksrad befinden sich jeweils drei Kreisausschnitte mit den Farben Blau, Rot und Gelb.
2. Ein Spieler kann auf Rot, Blau oder auf Gelb setzen und hat genau dann gewonnen, wenn beide Glücksräder die entsprechende Farbe anzeigen.
3. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist viermal so groß, wenn man statt auf Rot auf Blau setzt.
4. Setzt man auf Gelb, so ist die Gewinnwahrscheinlichkeit ungefähr doppelt so groß wie beim Setzen auf Blau.

Die beiden Freundinnen denken lange nach, kommen aber zu keinem Ergebnis. Sie wenden sich an ein Internetforum und schildern ihr Problem. Kannst Du ihnen helfen? Formuliere einen Forumsbeitrag.

Lösung zur Aufgabe Nr. L5-18

Hallo, Lisa und Hannah, Ihr könntet Euer Glücksrad z. B. so einteilen:

Farbe	1. Rad	2. Rad
Rot	40°	80°
Blau	80°	160°
Gelb	240°	120°

Bedingung 3 ist erfüllt.
Die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Setzen auf Gelb ist 2,25-mal so groß wie beim Setzen auf Blau. Damit ist auch Bedingung 4 erfüllt.